

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS II BLATT 11

Name:

Rückgabe in Gruppe:

MatrNr:

.....

Aufgabe 41 (4 Punkte, Eulersche Homogenitätsrelation) Es seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Zeigen Sie die Äquivalenz der beiden folgenden Aussagen:

(a) $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, t > 0: f(tx) = t^\alpha f(x)$

(b) $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}: \langle \nabla f(x), x \rangle = \alpha f(x).$

Aufgabe 42 (4 Punkte) Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt schiefsymmetrisch, wenn $A^T = -A$. Zeigen Sie:

A ist genau dann schiefsymmetrisch, wenn für jede Lösung φ der Differentialgleichung $y' = Ay$ die Funktion $x \mapsto \|\varphi(x)\|^2$ konstant ist.

Aufgabe 43 (4 Punkte) Untersuchen Sie, ob das das nichtlineare Gleichungssystem

$$x = \exp\left(\frac{1}{2}(\sin(y) - 1)\right) \quad \text{und} \quad y = \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{2}$$

eine eindeutige Lösung $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2$ besitzt. Formulieren Sie eine Behauptung und beweisen Sie diese.

Aufgabe 44 (4 Punkte) Wir betrachten eine zu der Funktion $f : [0, \infty)^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{falls } 0 \leq y \leq \frac{x^2}{2} \\ \frac{x}{2} + \frac{5}{x}(y - \frac{x^2}{2}) & \text{falls } \frac{x^2}{2} < y < x^2, \\ 3x & \text{falls } x^2 \leq y \end{cases}$$

gehörige Anfangswertaufgabe $y' = f(x, y)$ und $y(0) = 0$.

- Skizzieren Sie für ein $x > 0$ schematisch die Funktion $y \mapsto f(x, y)$.
- Verifizieren Sie, dass sowohl $\phi_1(x) = \frac{x^2}{4}$ als auch $\phi_2(x) = \frac{3x^2}{2}$ die obige Anfangswertaufgabe lösen.
- Beweisen Sie, dass die Funktion f die folgende Lipschitz-Bedingung erfüllt

$$\forall x \in [0, \infty) \exists L \geq 0 \forall y, z \in [0, \infty) : |f(x, y) - f(x, z)| \leq L|y - z|.$$

Was hat diese Aufgabe mit dem Satz von Picard-Lindelöf zu tun?