

## ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS II BLATT 12

Name: .....

Rückgabe in Gruppe:

MatrNr: .....

.....

**Aufgabe 45 (4 Punkte)** Es sei  $y : (0, \sqrt{2}) \mapsto \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto y(x)$ , eine differenzierbare Funktion, die der Gleichung  $F(x, y(x)) = 0$  für

$$F(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2)$$

genügt. Bestimmen Sie alle lokalen Extrema der Funktion  $y$ , und entscheiden Sie, in welchen Fällen es sich um ein Maximum beziehungsweise ein Minimum handelt.

Hinweise:

- Es gibt genau zwei solche Funktionen.
- Aus der Gleichung  $F(x, y(x)) = 0$  berechne man zunächst mit Hilfe der Kettenregel die Ableitung  $y'(x)$ , ohne explizit nach  $y$  aufzulösen!

**Aufgabe 46 (4 Punkte)** Es sei  $f(x_1, x_2) = (x_1^2 - x_2^2, 2x_1x_2)$ .

- Zeigen Sie, dass  $f$  in jedem Punkt  $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$  lokal umkehrbar ist. Ist  $f$  als Abbildung von  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  in sich global umkehrbar?
- Finden Sie eine affin-lineare Abbildung, die die lokale Umkehrung  $f^{-1}$  in der Nähe von  $f(1, -1)$  approximiert.

**Aufgabe 47 (4 Punkte)** Betrachten Sie die Gleichung  $z^3 + z = 1 - xy$ . Diese hat für jedes  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  eine eindeutig bestimmte reelle Lösung  $g(x, y)$ . Zeigen Sie, dass  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar ist und berechnen Sie  $\nabla g(1, 1)$ .

Hinweis: Auch wenn es so scheinen mag, aber der Satz über implizite Funktionen hilft Ihnen bei dieser Aufgabe nicht weiter.

**Aufgabe 48 (4 Punkte)** Für die Räuber-Beute-Gleichung aus der Vorlesung

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax - bxy \\ \dot{y} &= -cy + dxy,\end{aligned}$$

sei nun die Anfangsbedingung  $x(0) = x_0 > 0$  und  $y(0) = y_0 > 0$  gegeben. In der Vorlesung wurde angegeben, dass die eindeutig bestimmte Lösung  $\varphi(t) = (x(t), y(t))$  periodisch ist. Wir bezeichnen die Periode mit  $T > 0$ . Zeigen Sie, dass die Mittelwerte der Lösung

$$\frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \quad \text{und} \quad \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt$$

nicht von den Anfangswerten  $x_0$  und  $y_0$  abhängen.

Hinweis: Bestimmen Sie  $\int_0^T \frac{\dot{x}(t)}{x(t)} dt$  und  $\int_0^T \frac{\dot{y}(t)}{y(t)} dt$  auf zwei verschiedene Weisen.

**Abgabe:** in den entsprechenden Briefkasten bis Di., 20.01.2026, 12.25 Uhr  
**Besprechung:** ab Mi., 28.01.2026 in den Übungen