

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS II
BLATT 13

Name:

Rückgabe in Gruppe:

MatrNr:

.....

Aufgabe 49 (4 Punkte) Bestimmen Sie die Lösungsgesamtheit der Differentialgleichung

$$y'' - \frac{2}{x}y' + \left(1 + \frac{2}{x^2}\right)y = xe^x.$$

Hinweis: Eine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung ist $\varphi(x) = x \sin(x)$.

Aufgabe 50 (4 Punkte)

(a) Es sei $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $ab > 0$. Zeigen Sie

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} \cosh(\sqrt{ab}) & \sqrt{\frac{a}{b}} \sinh(\sqrt{ab}) \\ \sqrt{\frac{b}{a}} \sinh(\sqrt{ab}) & \cosh(\sqrt{ab}) \end{pmatrix}.$$

Zu welchem Ergebnis kommen Sie, wenn $ab < 0$ bzw. $b = 0$ vorausgesetzt ist?

(b) Berechnen Sie für $x > 0$

$$\exp\left(\int_0^x P(t)dt\right) \quad \text{wobei} \quad P(t) = \begin{pmatrix} 0 & 2t \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und zeigen Sie, dass hierdurch *kein* Lösungsfundamentalsystem für $y' = Py$ gegeben ist.

Aufgabe 51 (4 Punkte) Lösen Sie die Anfangswertaufgabe

$$y' = \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2}, \quad y(e) = 2.$$

Aufgabe 52 (4 Punkte) Bestimmen Sie den Abstand des Ellipsoids

$$E = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a^2 + b^2 + 4c^2 = 16\} \quad \text{von der Fläche} \quad F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 16\}.$$