Analysis I

Rüdiger W. Braun

Sommersemester 2025

Inhaltsverzeichnis

Buchempfehlungen

Es gibt viele Bücher zur Analysis. Diese Vorlesung orientiert sich an der Analysis I [For16] von Forster, ihr zweiter Teil im Wintersemester 2025/26 dann an der Analysis II [For13] von Forster.

Sehr gut finde ich auch die Analysis 1 [Kab00] und die Analysis 2 [Kab97] von Kaballo. Die Bücher von Kaballo sind sehr viel umfangreicher und behandeln auch Themen, für die in der Vorlesung keine Zeit ist.

Ein Buch, welches versucht, den Übergang von Schule zu Hochschule zu erleichtern, dann aber doch viel macht, was wir nicht brauchen, ist das von Schichl und Steinbauer [SS18].

1 Definition, Satz und Beweis

1.1 Definition

Eine *Definition* vergibt einen Namen oder eine Abkürzung für ein oder mehrere Objekte.

Beispiele

- Eine natürliche Zahl a heißt *Teiler* einer natürlichen Zahl b, wenn es eine natürliche Zahl c mit $ac = b$ gibt.
- Eine *Primzahl* ist eine natürliche Zahl > 1, die keine Teiler außer 1 und sich selbst hat.
- $h_n := \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ heißt n*-te harmonische Zahl.*

Jedes Objekt kann nur einmal definiert werden.

1.2 Axiom

Axiome beschreiben das Regelwerk einer Struktur. Sie sind daher eigentlich auch Definitionen.

1.3 Satz

Das ist eine wahre, nicht offensichtliche Aussage. Jeder Satz besitzt einen Beweis. Auch wenn man es nicht immer sofort sieht, haben alle Sätze die Gestalt $a \Rightarrow b$. Dabei ist a die Voraussetzung und b die Behauptung.

Varianten:

Hauptsatz, Theorem Besonders wichtiger Satz

Lemma Meist Hilfssätze. Nach Personen benannte Lemmata sind dagegen in Wirklichkeit Theoreme (Bsp: Zornsches Lemma)

Korollar Direkte Folgerung aus einem anderen Satz; oft ist der Beweis so kurz, dass man ihn nicht hinschreibt

Wichtige Sätze haben Namen: Zwischenwertsatz, Satz von H. A. Schwarz

1.4 Beweis

Ein Beweis ist die Herleitung einer Aussage durch logische Schlüsse.

1.4.1 Direkter Beweis

1.1 Satz. *Das Quadrat einer geraden Zahl ist gerade.*

Beweis. Sei n gerade. Dann existiert m mit $n = 2m$. Also $n^2 = (2m)^2 = 4m^2 = 2(2m^2)$. $\square$

1.4.2 Beweis durch Kontraposition

Ein Beweis durch Kontraposition wird geführt, indem man aus der Negation der Behauptung die Negation der Voraussetzung herleitet.

1.2 Satz. *Wenn n^2 gerade ist, dann ist auch n gerade.*

Beweis. Wir zeigen: Wenn n ungerade ist, dann ist n^2 ungerade. Wenn n ungerade ist, dann gibt es m mit $n = 2m + 1$. Dann $n^2 = 4m^2 + 4m + 1$. Daher ist n^2 ungerade. $\square$

1.4.3 Beweis durch Widerspruch

Aus einer richtigen Aussage kann man nur richtige Aussagen herleiten. Wenn man also aus einer Aussage eine falsche Aussage herleiten kann, dann war die erste Aussage auch schon falsch.

1.3 Satz (Euklid). *Es gibt unendlich viele Primzahlen.*

Beweis. Angenommen, es gebe nur endlich viele Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_n$ für ein geeignetes n. Setze $q = p_1 \cdot p_2 \cdots p_n + 1$. Die Zahl q besitzt einen Primteiler r. Dieser kann aber keines der p_j sein, denn q lässt bei Division durch p_j den Rest 1. Wir haben den folgenden Widerspruch gefunden

- Die Aufzählung $p_1, \ldots, p_n$ umfasst alle Primzahlen.

- Es gibt eine von den Zahlen $p_1, \ldots, p_n$ verschiedene Primzahl.

Daher war die Annahme falsch. $\square$

1.4.4 Falscher Beweis

Beide Beispiele sind aus Schichl, Steinbauer.

1.4 Satz (Achtung Lüge!). *In Wien gibt es in allen Häusern Ratten.*

Beweis. In Häusern, in denen es Ratten gibt, werden Rattenfallen aufgestellt. In Wien stehen in jedem Haus Rattenfallen. Also gibt es in jedem Haus Ratten. □

1.5 Satz (Achtung Lüge!). $1 = 2$

Beweis.

$$\begin{aligned} a &= b && \cdot a \\ a^2 &= ab && + a^2 \\ a^2 + a^2 &= a^2 + ab && \\ 2a^2 &= a^2 + ab && - 2ab \\ 2a^2 - 2ab &= a^2 - ab && \\ 2(a^2 - ab) &= 1(a^2 - ab) && \end{aligned}$$

Also $2 = 1$. □

1.4.5 Folgerungsketten

Folgerungsketten wie in 1.4.4 werden von oben nach unten gelesen und bedeuten, dass jede Zeile aus der darüber stehenden folgt. Wenn man etwas anderes meint, muss man das durch umgekehrte Implikationspfeile oder Äquivalenzpfeile anzeigen. Besser ist es, die Folgerungskette neu zu schreiben.

1.5 Beispiel

Beispiele helfen beim Verständnis. Auch noch so viele Beispiele ersetzen aber keinen Beweis.

Ein einziges Gegenbeispiel widerlegt aber eine Vermutung.

1.6 Vermutung (Fermat 1640). *Für jede Primzahl p ist $2^{2^p} + 1$ eine Primzahl.*

Gegenbeispiel, Euler 1732.

$$2^{2^5} + 1 = 4\,294\,967\,297 = 641 \cdot 6\,700\,417.$$ □

2 Naive Mengenlehre

"Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen hat, soll uns niemand mehr vertreiben können."
David Hilbert

"Spätere Generationen werden die Mengenlehre als Krankheit ansehen, die man überwunden hat."
Henri Poincaré

Eine *Menge* ist eine Zusammenfassung von Objekten. Die in diesem Sinne zusammengefassten Objekte heißen *Elemente* der Menge.

2.1 Beispiel. Die folgenden Mengen sind "einfach da":

- Die leere Menge $\emptyset = \{\}$.
- Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Die Menge, die aus allen natürlichen Zahlen und der Null besteht, bezeichne ich mit $\mathbb{N}_0$.
- Die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.
- Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$. Sie enthält alle Brüche $\frac{p}{q}$, wobei p und q ganze Zahlen sind und $q \neq 0$ und $\frac{mp}{mq}$ mit $\frac{p}{q}$ identifiziert wird.
- Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen. Wir werden sie in den nächsten Stunden genauer beschreiben.

2.2 Bemerkung. Man kann Mengen definieren durch

- Aufzählung ihrer Elemente innerhalb von Mengenklammern

  Beispiel: Die Lösungsmenge der quadratischen Gleichung $x^2 + 2x = 0$ ist $\{-2, 0\}$
- Beschreibung durch Angabe der Eigenschaft der Elemente der Menge

  Beispiel: $P = \{m \in \mathbb{N} \mid m \neq 1 \text{ und } m \text{ hat nur die Teiler } 1 \text{ und } m\}$

  Statt $\mid$ verwenden manche Autoren auch den Doppelpunkt :

2.3 Definition. Wenn x Element von M ist, dann schreibt man $x \in M$ (lies "x in M").

Wenn M und N Mengen sind und jedes Element von N auch Element von M ist, dann schreibt man $N \subseteq M$. Man sagt, N sei eine *Teilmenge* von M bzw. M eine *Obermenge* von N.

2.4 Bemerkung. (a) $\emptyset \subseteq \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.

(b) Zwei Mengen M und N sind genau dann gleich, wenn $M \subseteq N$ und $N \subseteq M$.

2.5 Definition. Die folgenden Mengenoperationen werden definiert

$$\begin{array}{ll} \text{Vereinigung} & M \cup N = \{x \mid x \in M \text{ oder } x \in N\} \\ \text{Durchschnitt} & M \cap N = \{x \mid x \in M \text{ und } x \in N\} \\ \text{Mengendifferenz} & M \setminus N = \{x \mid x \in M \text{ und } x \notin N\} \end{array}$$

2.6 Beispiel. $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{N}_0 \setminus \{0\} = \mathbb{N}$.

2.7 Satz. *Es seien A, B und C Teilmengen von X. Dann gelten*

(a) (Assoziativgesetze)

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C), \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$$

(b) (Kommutativitätsgesetze)

$$A \cap B = B \cap A, \quad A \cup B = B \cup A.$$

(c) (Distributivgesetze)

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C), \quad (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

(d) (Formeln von De Morgan)

$$X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B), \quad X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B).$$

2.8 Definition. Es seien X und Y zwei Mengen. Die Menge aller Paare (x, y) mit $x \in X$ und $y \in Y$ ist das *kartesische Produkt* von X mit Y, geschrieben $X \times Y$. Anstelle von $X \times X$ schreibt man oft X^2.

Höhere Produkte definiert man sukkzessive, also $A \times B \times C = (A \times B) \times C$, schreibt die Elemente von $A \times B \times C$ dann aber in der Form (a, b, c).

2.9 Beispiel. $\{0, 1\} \times \{2, 3, 4\} = \{(0, 2), (0, 3), (0, 4), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$.

2.10 Definition. Wenn M eine Menge ist, dann bildet die Menge ihrer Teilmengen die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$.

2.11 Beispiel. (a) $X = \{1, 2, 3\}$, dann hat $\mathcal{P}(X)$ die folgenden acht Elemente:

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, X.$$

(b) $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$. Achtung: $\{\emptyset\} \neq \emptyset$.

2.12 Definition. Gegeben seien Mengen X und Y. Eine *Abbildung* $f\colon X \to Y$ besteht aus dem *Definitionsbereich* X, dem *Zielbereich* Y und einer Vorschrift, die jedem Element aus X genau ein Element $y = f(x)$ aus Y zuordnet.

Man schreibt auch $z \mapsto f(z)$, um die Zuordnungsvorschrift zu notieren.

2.13 Beispiel. $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$, $f\colon X \to Y$, $x \mapsto x^2$.

2.14 Definition. Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung, seien $M \subseteq X$ und $N \subseteq Y$.

(a) $f(M) = \{f(x) \mid x \in M\}$ heißt *Bild* von M unter f.

(b) $f^{-1}(N) = \{x \mid f(x) \in N\}$ heißt *Urbild* von N unter f.

(c) Für $y \in Y$ schreibt man häufig $f^{-1}(y)$ anstatt $f^{-1}(\{y\})$.

2.15 Beispiel. Sei f die Abbildung aus Beispiel 2.13 und seien $A = \{1, 2\}$ und $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Dann $f(A) = \{1, 4\}$, $f^{-1}(B) = \{1, 2\}$ und $f^{-1}(5) = \emptyset$.

2.16 Definition. Seien $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ zwei Abbildungen. Die *Verknüpfung* ist definiert als $g \circ f\colon X \to Z$, $g \circ f(x) = g(f(x))$.

2.17 Beispiel. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$. Dann

$$f \circ f(x) = \frac{1}{\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^2 + 1} = \frac{\left(x^2+1\right)^2}{1 + (x^2+1)^2} = \frac{x^4 + 2x^2 + 1}{x^4 + 2x^2 + 2}.$$

3 Ganze Zahlen und vollständige Induktion

Das Prinzip der *vollständigen Induktion* besagt:

Wenn eine von einer natürlichen Zahl abhängige Aussage $A(n)$ für $n = 1$ zutrifft und für jedes n die Implikation $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ gilt, dann gilt $A(n)$ für alle n.

3.1 Bemerkung. Ein Induktionsbeweis besteht also aus zwei Teilen:

- Dem *Induktionsanfang,* in dem die Behauptung für $n = 1$ gezeigt wird
- Dem *Induktionsschluss,* in dem gezeigt wird, dass aus der Richtigkeit der Behauptung für n die Richtigkeit für $n+1$ folgt. Die *Indultionsannahme* ist dann die Behauptung für n.

3.2 Bemerkung. Wenn die Behauptung erst ab einem n_0 gezeigt werden soll, dann startet man die Induktion bei diesem n_0.

3.3 Satz. *Für alle natürlichen Zahlen* n *gilt*

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Beweis. Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist die linke Seite gleich 1 und die rechte gleich $\frac{1 \cdot 2}{2}$. Also sind sie gleich.

Induktionsschluss: Die Aussage sei richtig für n. Dann

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + n + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}, \end{aligned}$$

wobei im ersten Schritt die Indultionsannahme verwendet wird. □

3.4 Satz. *Für alle natürlichen Zahlen* $n \geq 5$ *gilt*

$$2^n > n^2,$$

Die Definition durch Rekursion funktioniert analog:

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ wollen wir a_n definieren. Das kann man in zwei Schritten tun:

- Zuerst definiert man a_1.

- Sind $a_1, \ldots, a_n$ bereits gegeben, so definiert man a_{n+1} unter Verwendung von $a_1, \ldots, a_n$.

3.5 Beispiel. (a) Für $n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir die *Fakultät* $n!$ rekursiv durch $0! = 1$ und $(n+1)! = n! \cdot (n+1)$.

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ definieren wir $\sum_{j=1}^n$ rekursiv wie folgt:

$$\sum_{j=1}^{1} a_j = a_1, \qquad \sum_{j=1}^{n+1} a_j = a_{n+1} + \sum_{j=1}^{n} a_j.$$

(c) Analog definieren wir

$$\prod_{j=1}^{1} a_j = a_1, \qquad \prod_{j=1}^{n+1} a_j = a_{n+1} \cdot \prod_{j=1}^{n} a_j.$$

(d) Dann $n! = \prod_{j=1}^n j$.

(e) Für $k \in \mathbb{N}_0$ und $x \in \mathbb{R}$ definieren wir x^k durch Rekursion nach k:

$$x^0 = 1, \qquad x^{k+1} = x \cdot x^k.$$

4 Die reellen Zahlen

Die *reellen Zahlen* sind eine Menge $\mathbb{R}$ zusammen mit zwei Rechenvorschriften, die je zwei Elementen $x, y \in \mathbb{R}$ ein Element $x + y \in \mathbb{R}$ und ein Element $x \cdot y \in \mathbb{R}$ zuordnen, und einer Vergleichsrelation $>$, so dass die in den nächsten drei Unterabschnitten angegebenen Axiome erfüllt sind.

4.1 Körperaxiome

(a) (Kommutativgesetze) $x + y = y + x$ und $x \cdot y = y \cdot x$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

(b) (Assoziativgesetze) $(x + y) + z = x + (y + z)$ und $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$.

(c) (Null und Eins) Es gibt Elemente $0, 1 \in \mathbb{R}$ mit $0 \neq 1$ und $0 + x = x$ und $1 \cdot x = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(d) (Inverses Element der Addition) Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $y \in \mathbb{R}$ mit $x + y = 0$.

Es zeigt sich, dass y eindeutig bestimmt ist; man bezeichnet es mit $-x$.

(e) (Inverses Element der Multiplikation) Zu jedem $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gibt es eine Zahl $z \in \mathbb{R}$ mit $x \cdot z = 1$.

Es zeigt sich, dass z eindeutig bestimmt ist. Man bezeichnet es mit x^{-1} oder $\frac{1}{x}$.

(f) (Distributivgesetz) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$.

4.1 Satz. *Das Nullelement ist eindeutig.*

4.2 Satz. *Das Einselement ist eindeutig.*

4.3 Satz. *Das additiv Inverse und das multiplikativ Inverse sind eindeutig.*

Beweis. Zur Abwechslung für die Multiplikation. Sei $x \neq 0$ und seien $w, z \in \mathbb{R}$ Elemente mit $x \cdot w = 1 = z \cdot w$. Dann

$$w = 1 \cdot w = w \cdot 1 = w \cdot (x \cdot z) = (w \cdot x) \cdot z = (x \cdot w) \cdot z = 1 \cdot z = z. \qquad \square$$

4.4 Satz. $0 \cdot x = 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$.

Daraus folgt dann

4.5 Satz. $(-1) \cdot x = -x$.

4.6 Satz. *Für jedes* $x \in \mathbb{R}$ *gilt* $-(-x) = x$. *Für jedes* $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *gelten* $x^{-1} \neq 0$ *und* $(x^{-1})^{-1} = x$.

4.7 Korollar. $(-1) \cdot (-1) = 1$.

4.8 Satz (Nullteilerfreiheit). *Wenn* $x \cdot y = 0$, *dann* $x = 0$ *oder* $y = 0$.

Arithmetische Beziehungen, die man durch bloßes Ausrechnen nachweist, wie etwa die binomischen Formeln, werden in der Vorlesung nicht noch einmal bewiesen.

4.2 Anordnungsaxiome

Es gibt eine Teilmenge P von $\mathbb{R}$, welche die beiden folgenden Axiome erfüllt:

(a) (Trichotomie) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der drei folgenden Möglichkeiten

$$x \in P,\ x = 0 \text{ oder } -x \in P$$

(b) (Abgeschlossenheit bezüglich Addition und Multiplikation) Sind x und y in P, dann auch $x + y$ und $x \cdot y$.

Statt $x \in P$ schreibt man $x > 0$, statt $-x \in P$ schreibt man $x < 0$. Ferner schreibt man $x < y$, falls $y - x > 0$, und $x \leq y$, falls $x < y$ oder $x = y$. Analog definiert man $>$ und $\geq$.

Falls $x > 0$, so heißt x *positiv*, falls $x < 0$, so heißt x *negativ*.

4.9 Satz. *Seien* $x, y > 0$, $u, v < 0$ *und* $z \in \mathbb{R}$. *Dann gelten*

(a) $xy > 0$,

(b) $uv > 0$,

(c) $xu < 0$,

(d) $z^2 \geq 0$,

(e) $z^2 > 0$, *vorausgesetzt* $z \neq 0$,

(f) $1 > 0$,

(g) $x^{-1} > 0$,

(h) $u^{-1} < 0$.

4.10 Satz. *Falls* $x < y$ *und* $z \in \mathbb{R}$ *beliebig, so gilt* $x + z < y + z$.

4.11 Satz. *(a) Falls* $x < y$ *und* $z > 0$, *so gilt* $xz < yz$.

(b) Falls $x < y$ *und* $z < 0$, *so gilt* $xz > yz$.

4.12 Satz. *Ist* $0 < x < y$, *so gilt* $x^2 < y^2$.
Sind umgekehrt x *und* y *beide positiv und ist* $x^2 < y^2$, *so folgt* $x < y$.

4.13 Definition. Für $x \in \mathbb{R}$ definiert man den *Absolutbetrag* als

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0, \\ -x, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

4.14 Satz. *Sind* $x, y \in \mathbb{R}$, *so gilt* $|x \cdot y| = |x||y|$.

4.15 Beispiel. Man bestimme alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|3x - 6| = |8 - x|$.

Es gibt zwei Fälle: Im ersten Fall lautet die Gleichung $3x - 6 = 8 - x$, ihre Lösung ist $x = \frac{7}{2}$, im zweiten lautet sie $3x - 6 = -(8 - x)$ mit der Lösung $x = -1$.

Die beiden Lösungen der Gleichung sind also $x = \frac{7}{2}$ und $x = -1$.

4.16 Satz (Dreiecksungleichung). *Sind* $x, y \in \mathbb{R}$, *so gilt* $|x + y| \leq |x| + |y|$.

4.3 Vollständigkeitsaxiom

4.17 Satz. *Es gibt kein* $x \in \mathbb{Q}$ *mit* $x^2 = 2$.

4.18 Definition. Sei $M \subseteq \mathbb{R}$. Dann heißt M *nach oben beschränkt,* wenn es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt mit $x \leq c$ für alle $x \in M$. Jedes c mit dieser Eigenschaft heißt *obere Schranke* von M.

M heißt *nach unten beschränkt,* wenn es ein $d \in \mathbb{R}$ gibt mit $x \geq d$ für alle $x \in M$. Jedes d mit dieser Eigenschaft heißt *untere Schranke* von M.

M heißt *beschränkt,* wenn es nach oben und unten beschränkt ist.

4.19 Beispiel. $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 2\}$. Dann ist M beschränkt. Eine obere Schranke ist $c = \frac{3}{2}$ und eine untere Schranke ist $-\frac{3}{2}$.

4.20 Definition. Sei $M \subseteq \mathbb{R}$. Wenn es ein $c \in M$ gibt, welches obere Schranke von M ist, so bezeichnet man c als das *Maximum* von M, in Zeichen $c = \max M$. In diesem Fall ist c das größte Element von M. Wenn M ein kleinstes Element hat, so bezeichnet man es als *Minimum* und schreibt $\min M$ dafür.

4.21 Definition. Sei $M \subseteq \mathbb{R}$. Wenn es eine kleinste obere Schranke von M gibt, dann bezeichnet man sie als *Supremum* von M, in Zeichen $\sup M$. Wenn es eine größte untere Schranke gibt, so bezeichnet man sie als *Infimum* von M, in Zeichen $\inf M$.

Beispiel. (a) Sei $M = \left\{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$. Dann ist M nach oben und unten beschränkt und besitzt kein Maximum. Ferner gilt $\inf M = \min M = 0$. Wir werden später sehen, dass $\sup M = 1$.

(b) Sei $M = \left\{x \in \mathbb{Q} \middle| x^2 \leq 2\right\}$. Wir planen, $\sqrt{2}$ als $\sup M$ zu definieren. Dazu müssen wir sicherstellen, dass es das Supremum gibt.

4.22 Satz. $M \subseteq \mathbb{R}$ *sei nach oben beschränkt. Für* $c \in \mathbb{R}$ *sind äquivalent:*

(a) $c = \sup M$.

(b) c *ist obere Schranke von* M *und kein* $d < c$ *ist ebenfalls obere Schranke von* M.

(c) Für alle $x \in M$ *gilt* $x \leq c$ *und für jedes* $\epsilon > 0$ *existiert ein* $x \in M$ *mit* $x > c - \epsilon$.

4.23 Vollständigkeitsaxiom. Jede nicht-leere, nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt in $\mathbb{R}$ ein Supremum.

4.24 Bemerkung. $M \subseteq \mathbb{R}$ sei nach oben beschränkt. M besitzt genau dann ein Maximum, wenn $\sup M \in M$. In diesem Fall $\max M = \sup M$. Die analoge Aussage für das Minimum gilt ebenfalls.

4.25 Satz. *Zu jedem* $a > 0$ *existiert genau ein* $b > 0$ *mit* $b^2 = a$.
Dieses b *heißt Quadratwurzel von* a*, in Zeichen* $b = \sqrt{a}$.

4.26 Definition. Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ definieren wir die folgenden *Intervalle:*

$$\begin{aligned}
[a,b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} &]a,b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \\
[a,b[&= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} &]a,b[&= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \\
[a,\infty[&= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\} &]a,\infty[&= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}. \\
]-\infty,b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\} &]-\infty,b[&= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}
\end{aligned}$$

4.27 Beispiel. $\{x \in \mathbb{R} \mid x - x^2 \leq 0\} =]-\infty, 0] \cup [1, \infty[$.
Es ist nämlich $x - x^2 = x(1-x)$ genau dann ≤ 0, wenn einer der Faktoren ≥ 0 und der andere ≤ 0 ist.

4.28 Satz (Archimedisches Axiom). *Ist* $a \in \mathbb{R}$*, so existiert ein* $n \in \mathbb{N}$ *mit* $n > a$.

4.29 Satz (Eudoxos). *Zu jedem* $b > 0$ *existiert ein* $n \in \mathbb{N}$ *mit* $\frac{1}{n} < b$.

4.30 Beispiel. Für $M = \left\{1 - \frac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N}\right\}$ gilt $\sup M = 1$.

Ausblick

Zwei verschiedene Methoden, die reellen Zahlen aus den rationalen zu konstruieren, findet man in §15 des Buchs von Kaballo.

In der älteren der beiden Methoden sind die reellen Zahlen die *Dedekindschen Schnitte.* Ein Dedekindscher Schnitt S ist eine Teilmenge der rationalen Zahlen mit folgenden drei Eigenschaften

(a) $S \neq \emptyset$ und $S \neq \mathbb{Q}$,

(b) wenn $x \in S$ und $y \in \mathbb{Q}$ mit $y < x$, dann $y \in S$,

(c) zu jedem $x \in S$ gibt es ein $z \in S$ mit $z > x$,

Dann entspricht 2 dem Schnitt $\{x \in \mathbb{Q} | x < 2\}$ und $\sqrt{2}$ entspricht dem Schnitt $\left\{x \in \mathbb{Q} \middle| x < 0 \text{ oder } x^2 < 2\right\}$.

5 Folgen und ihre Grenzwerte

5.1 Satz (Bernoulli-Ungleichung). *Für* $h > -1$ *und* $n \in \mathbb{N}_0$ *gilt* $(1+h)^n \geq 1 + nh$.

5.2 Satz (Arithmetische und geometrische Progression). *:*

(a) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$.

(b) Für jedes $q \in \mathbb{R}$ *mit* $q \neq 1$ *gilt*

$$\sum_{j=0}^{n} q^j = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

5.3 Definition. Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$ definiert man den *Binomialkoeffizienten* durch

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

5.4 Satz. *Für* $k, n \in \mathbb{N}$ *mit* $k \leq n$ *gilt*

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

Insbesondere sind alle Binomialkoeffizienten ganz.

5.5 Satz (Binomischer Lehrsatz). *Für* $n \in \mathbb{N}_0$ *und* $x, y \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

5.6 Definition. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist *beschränkt,* wenn die Menge $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt ist.

5.7 Beispiel. (a) Für jedes $a \neq 0$ ist die Folge $(a \cdot n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt.

(b) Für jedes $q \in [-1, 1]$ ist die Folge $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach unten beschränkt durch -1 und nach oben durch 1.

(c) Für jedes $q \in]-1, 1[$ ist die Folge $(nq^n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt.

(d) Für jedes $q \in]-1, 1[$ ist die Folge $(n^2 q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt.

5.8 Definition. (a) Eine *Folge* in einer Menge M ist eine Abbildung $a \colon \mathbb{N} \to M$, welche man in der Form $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ schreibt.

(b) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen, und sei $b \in \mathbb{R}$. Die Folge heißt *konvergent* gegen b, falls gilt:

> Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ gilt $|a_n - b| < \epsilon$.

Man sagt dann, b sei der *Grenzwert* der Folge, und schreibt $b = \lim_{n\to\infty} a_n$ oder $a_n \to b$.

Eine Folge heißt *divergent,* wenn sie keinen Grenzwert besitzt.

5.9 Beispiel. $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+3} = \frac{1}{2}$. Da wir noch keine Rechenregeln für Grenzwerte haben, beweisen wir die Konvergenz zu Fuß.

Sei $\epsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Wähle $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\frac{1}{N} < 4\epsilon$. Dann gilt für jedes $n \geq N$

$$\left|\frac{n+1}{2n+3} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2n+2-(2n+3)}{4n+6}\right| = \frac{1}{4n+6} \leq \frac{1}{4N} < \epsilon.$$

5.10 Satz. *Eine Folge besitzt höchstens einen Grenzwert.*

5.11 Satz. *Jede konvergente Folge ist beschränkt.*

5.12 Satz (Sandwichsatz). *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gelte $a_n \leq b_n \leq c_n$. Wenn die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen denselben Grenzwert L konvergieren, dann $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.*

5.13 Beispiel. (a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

(b) Sei $q \in \mathbb{R}$.

(i) Falls $|q| < 1$, so gilt $\lim q^n = 0$.

(ii) Falls $|q| > 1$, so divergiert die Folge $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(iii) $\lim_{n\to\infty} 1^n = 1$.

(iv) Die Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert.

5.14 Bemerkung. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ heißt *Nullfolge.*

5.15 Satz (Rechenregeln). *Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$.*

(a) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$.

(b) $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b$.

(c) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab$.

(d) Ist $b \neq 0$, *dann* $b_n \neq 0$ *mit höchstens endlich vielen Ausnahmen und* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$.

5.16 Beispiel. Sei $q \in \,]-1, 1[$. Dann $\lim_{n\to\infty} nq^n = 0$ und $\lim_{n\to\infty} n^2 q^n = 0$.

5.17 Beispiel.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(1-\frac{n}{4}\right)\left(1+\frac{n}{4}\right)}{n^2+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{4}\right)}{n^2\left(1+\frac{3}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{4}\right)}{1+\frac{3}{n^2}}$$
$$= \frac{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{4}\right)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{4}\right)}{1+3\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)^2} = -\frac{1}{16}.$$

5.18 Satz. *Seien* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergente Folgen mit* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ *und* $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ *und* $a_n \leq b_n$ *für fast alle* $n \in \mathbb{N}$. *Dann* $a \leq b$.

5.19 Definition. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *monoton wachsend,* wenn $a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sie heißt *streng monoton wachsend,* wenn $a_n < a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Analog definiert man (streng) monoton fallend.

5.20 Satz. *Ist* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *monoton wachsend und nach oben beschränkt, so konvergiert die Folge und es gilt* $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. *Ist* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *monoton fallend und nach unten beschränkt, so konvergiert die Folge ebenfalls und es gilt* $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

5.21 Beispiel. Sei $x > 0$. Wähle ein beliebiges $a_1 > 0$ mit $xa_1 < 1$ und definiere rekursiv $a_{n+1} = 2a_n - xa_n^2$. Dann gilt $\lim a_n = 1/x$.

Beweis. Wir zeigen mit vollständiger Induktion für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$0 < a_n \leq a_{n+1} \leq 1/x.$$

Dann folgt die Existenz eines Grenzwerts b aus dem vorigen Satz. Aus den Rechenregeln für Grenzwerte folgt $b = 2b - xb^2$. Also $b = 0$ oder $1 = 2 - xb$. Der erste Fall scheidet aus, denn $b \geq a_1 > 0$ wegen der Monotonie. Also $b = 1/x$. □

5.22 Definition. Sei $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende Folge in $\mathbb{N}$. Ist ferner $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, so ist $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} = (a_{n_1}, a_{n_2}, \dots)$ eine *Teilfolge* von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Beispiel. Sei $a_n = (-1)^n$, und sei $n_k = 2k$. Dann $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} = (1)_{k\in\mathbb{N}}$.

5.23 Satz. *Jede Teilfolge einer beschränkten Folge ist beschränkt und jede Teilfolge einer konvergenten Folge ist konvergent.*

5.24 Theorem (Satz von Bolzano-Weierstraß). *Jede beschränkte Folge in* $\mathbb{R}$ *besitzt eine konvergente Teilfolge.*

5.25 Definition. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *Cauchy-Folge*, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $|a_n - a_m| < \epsilon$ für alle $n, m \geq N$.

5.26 Theorem (Konvergenzkriterium von Cauchy). *Für eine Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* $\mathbb{R}$ *sind äquivalent:*

(a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist konvergent.*

(b) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist eine Cauchy-Folge.*

5.27 Beispiele. (a) Die Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht, denn für jedes n gilt $|(-1)^{n+1} - (-1)^n| = 2$.

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!}$. Dann konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Den Grenzwert bezeichnet man als *Eulersche Zahl* e

6 Reihen

6.1 Definition. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ und sei $s_n = \sum_{j=1}^{n} a_j$. Die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezeichnet man als Folge der *Partialsummen.*

Wenn die Folge der Partialsummen konvergiert, dann sagt man, dass die *Reihe* $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ konvergiert und schreibt $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ für ihren Grenzwert. Wenn $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert, so sagt man, dass die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ divergiert.

6.2 Satz. *Wenn* $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ *konvergiert, dann ist* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Nullfolge.*

Die Umkehrung gilt i. a. nicht.

6.3 Beispiel. Sei $q \in \mathbb{R}$. Die *geometrische Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ divergiert für $|q| \geq 1$. Ansonsten gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \quad \text{für } |q| < 1.$$

6.4 Beispiel. Die *harmonische Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert.

6.5 Beispiel. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+10}$ divergiert.

6.6 Satz. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$

6.7 Korollar. *für* $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ *konvergiert die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$.

6.8 Satz (Konvergenzkriterium von Leibniz). *Sei* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine monoton fallende Nullfolge. Dann konvergiert* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}b_n$. *Ferner gilt*

$$b_1 - b_2 \leq \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}b_n \leq b_1.$$

6.9 Beispiel. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ konvergiert und es gilt

$$1 \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \geq \frac{1}{2}.$$

Wir werden später sehen, dass die Reihe gegen $\ln 2$ konvergiert.

6.10 Bemerkung. Mit der folgender Methode erhalten wir bessere Einschließungen: Es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \sum_{n=5}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \frac{7}{12} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k+4}.$$

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k+4}$ erfüllt ebenfalls das Konvergenzkriterium von Leibniz. Daher liegt ihr Reihenwert zwischen $\frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{30}$ und $\frac{1}{5}$. Insgesamt folgt

$$\frac{7}{12} + \frac{1}{30} = \frac{37}{60} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \le \frac{7}{12} + \frac{1}{5} = \frac{47}{60}.$$

6.11 Definition. Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt *absolut konvergent*, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

6.12 Satz. *Absolut konvergente Reihen sind konvergent.*

6.13 Bemerkung. Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert, dann $\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

6.14 Satz (Majorantenkriterium). *Seien* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *Folgen mit* $|a_n| \le c_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$. *Wenn* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *konvergiert, dann konvergiert* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolut.*

6.15 Bemerkung. (a) Man bezeichnet dann $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ als *konvergente Majorante* von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(b) Eine Umformulierung des Majorantenkriteriums liefert: Wenn $|a_n| \le c_n$ für jedes n und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert, dann divergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$. In diesem Falle bezeichnet man $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ als *divergente Minorante.*

6.16 Beispiel. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+5}$ divergiert. Für $n \ge 3$ gilt nämlich $5 \le n^2$ und daher

$$\frac{n}{n^2+5} \ge \frac{n}{2n^2} = \frac{1}{2n}.$$

Daher ist die Hälfte der harmonischen Reihe eine divergente Minorante.

6.17 Satz (Quotientenkriterium). *Es gebe ein* $N \in \mathbb{N}$ *und ein* $q \in \mathbb{R}$ *mit* $q < 1$, *so dass* $a_n \neq 0$ *und* $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \le q$ *für alle* $n \ge N$. *Dann ist* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolut konvergent.*

6.18 Korollar. *Es sei* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *eine Reihe, so dass* $a_n \neq 0$ *für fast alle* n *und so dass* $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} =: q$ *existiert.*

(a) Falls $q < 1$, *so konvergiert die Reihe absolut.*

(b) Falls $q > 1$, *so divergiert die Reihe.*

6.19 Beispiel. (a) Im Fall $q = 1$ sind feinere Untersuchungen notwendig. Zu diesem Fall gehören sowohl die harmonische Reihe als auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

(b) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{4^n}$ konvergiert. Es gilt nämlich

$$\frac{\frac{(n+1)^4}{4^{n+1}}}{\frac{n^4}{4^n}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^4 \frac{1}{4} \to \frac{1}{4} < 1.$$

6.20 Definition. Die *Exponentialfunktion* ist definiert durch

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Das Quotientenkriterium zeigt, dass diese Reihe in der Tat konvergiert.

6.21 Beispiel. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \pm \dots$ ist konvergent und hat die Summe 0. Die Umordnung

$$\frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq \frac{1}{2}} - \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}}_{\geq \frac{1}{2}} - \frac{1}{3} + \dots$$

ist divergent. Man kann zeigen: Wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, aber nicht absolut konvergiert, dann gibt es zu jedem $r \in \mathbb{R}$ eine Permutation σ von $\mathbb{N}$, so dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = r$. Das ist Aufgabe 32.6 aus dem Buch von Kaballo.

6.22 Satz (Umordnungssatz). *Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe und σ eine Bijektion von $\mathbb{N}$ auf sich. Setze $b_n = a_{\sigma(n)}$. Dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ absolut konvergent und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*

6.23 Satz (Cauchy-Produkt). *Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergent, und sei*

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k}.$$

Dann ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut konvergent, und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right).$$

6.24 Satz (Funktionalgleichung der Exponentialfunktion). *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y).$$

6.25 Korollar. *Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\exp(-x) = 1/\exp(x)$ und speziell $\exp(x) > 0$.*

7 Dezimaldarstellung

7.1 Bemerkung. Ist $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\{0, 1, \dots, 9\} = Z$, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n 10^{-n}$ gegen eine Zahl in $[0, 1]$. Das folgt aus dem Majorantenkriterium mit der Majorante $9\sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n}$.

7.2 Lemma. *Ist X die Menge aller Folgen in Z und definiert man*

$$\varphi\colon X \to [0, 1], \quad (c_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} c_n 10^{-n},$$

so ist φ surjektiv.

7.3 Beispiel. Zum Beispiel ist $\varphi(1, 6, 6, \dots) = \frac{1}{10} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{6}{10^n} = \frac{1}{10} + \frac{6}{100}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n = \frac{1}{10} + \frac{6}{100}\frac{1}{1-1/10} = \frac{1}{10}\left(1 + \frac{6}{9}\right) = \frac{1}{10}\cdot\frac{15}{9} = \frac{1}{6}$.

7.4 Bemerkung. Ist $n \in \mathbb{N}$ und $c = (c_1, \dots, c_n, 9, 9, 9, \dots)$ mit $c_n < 9$, so gilt

$$\varphi(c) = \varphi(c_1, \dots, c_{n-1}, 1 + c_n, 0, 0, 0, \dots).$$

7.5 Satz. *Sei $Y = \{(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X \mid$ für unendlich viele n ist $c_n \neq 9\}$, dann erhält man eine Bijektion*

$$\psi\colon Y \to [0, 1[, \quad (c_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \varphi((c_n)_{n\in\mathbb{N}}).$$

8 Injektive, surjektive und bijektive Abbildungen

8.1 Definition. Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ ist *injektiv,* wenn es zu jedem $y \in Y$ höchstens ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ gibt. Sie heißt *surjektiv,* wenn es zu jedem $y \in Y$ mindestens ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ gibt. Sie heißt *bijektiv,* wenn es zu jedem $y \in Y$ genau ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ gibt.

8.2 Beispiel. (a) Die Funktion $q\colon]0, \infty[\to]0, \infty[$, $x \mapsto x^2$, ist bijektiv. Das haben wir in Satz 4.25 gezeigt.

(b) Die Funktion $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, ist weder injektiv noch surjektiv. Das sieht man an $p(1) = p(-1)$ und $-1 \notin p(\mathbb{R})$.

8.3 Definition. (a) Es sei $f\colon X \to Y$ bijektiv mit *Graph* $\mathcal{G} = \{(x, f(x) \mid x \in X\}$. Setze $\mathcal{H} = \{(y, x) \mid (x, y) \in \mathcal{G}\}$. Dann ist $\mathcal{H}$ ebenfalls Graph einer Abbildung. Sie heißt *Umkehrabbildung* von f, man schreibt f^{-1}. Die Umkehrabbildung ist dadurch bestimmt, dass $f^{-1}(y) = x$ genau dann gilt, wenn $f(x) = y$.

(b) Wenn $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ Abbilungen sind, dann wird ihre *Verknüpfung* (engl. composition) definiert als

$$g \circ f\colon X \to Z, \quad g \circ f(x) = g(f(x)).$$

8.4 Beispiel. $f\colon [0, \infty[\to [0, \infty[$, $x \mapsto x^2$. Wir haben bereits gesehen, dass f bijektiv ist. Die Umkehrabbildung f^{-1} ist die Wurzelfunktion $f^{-1}\colon [0, \infty[\to [0, \infty[$, $x \mapsto \sqrt{x}$.

8.5 Satz. *(a) Es seien $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to X$ zwei Abbildungen mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$. Dann ist f injektiv und g ist surjektiv.*

(b) Wenn zusätzlich noch $f \circ g = \mathrm{id}_Y$, dann sind f und g bijektiv und es gelten $f^{-1} = g$ und $g^{-1} = f$.

8.6 Beispiel. Seien $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gegeben durch $f(n) = n + 1$ und

$$g(n) = \begin{cases} n-1, & n \geq 2, \\ 1, & n = 1. \end{cases}$$

Dann $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$, aber weder f noch g sind bijektiv.

9 Stetige Funktionen

9.1 Definition. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$, sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, und sei $x_0 \in I$. Dann heißt f *stetig in* x_0, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass gilt: Ist $x \in I$ und $|x - x_0| < \delta$, dann $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. Eine Funktion heißt *stetig,* wenn sie in jedem Punkt ihres Definitionsbereichs stetig ist.

9.2 Bemerkung. Das Zeichen "$\forall x \in X$" bedeutet "für alle $x \in X$" und das Zeichen "$\exists y \in Y$" bedeutet "es gibt ein $y \in Y$".

$f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in I$, falls

$$\forall \epsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in I : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Entsprechend ist f unstetig in x_0, wenn

$$\exists \epsilon > 0\, \forall \delta > 0\, \exists x \in I : |x - x_0| < \delta \text{ und } |f(x) - f(x_0)| \geq \epsilon.$$

9.3 Beispiel. (a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ ist stetig.

(b) Konstante Funktionen sind stetig.

(c) Definiere die Heaviside-Funktion $H\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Dann ist H unstetig in $x_0 = 0$.

9.4 Definition. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, sei $a \in I$ und sei $f\colon I \backslash \{a\} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir schreiben $\lim_{x \to a} f(x) = b$, wenn für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $I \setminus \{a\}$ mit $\lim_{n \to \infty} x_n = a$ die Aussage $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = b$ gilt.

9.5 Satz. *Sei* $I \subseteq \mathbb{R}$ *ein Intervall, sei* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *eine Funktion, und sei* $a \in I$. *Dann sind äquivalent:*

(a) f *ist stetig in* a.

(b) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

9.6 Satz. *Sei* $I \subseteq \mathbb{R}$ *ein Intervall und seien* $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ *stetig in* a. *Dann sind auch die folgenden Funktionen stetig in* a*:*

(a) $f + g$ *mit* $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$.

(b) $f - g$ *und* $f \cdot g$*, die ebenfalls punktweise definiert sind.*

(c) Falls $g(a) \neq 0$*, so ist auch* f/g *stetig in* a*.*

9.7 Definition. Eine Funktion der Form $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, $a_k \in \mathbb{R}$, heißt *Polynom.*

Sind p, q zwei Polynome, wobei q nicht das Nullpolynom ist, und ist $D = \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) \neq 0\}$, so bezeichnet man die Funktion

$$f\colon D \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}$$

als *gebrochen-rationale* Funktion.

9.8 Bemerkung. Wegen Satz 9.6 sind Polynome und gebrochen-rationale Funktionen stetig auf ihrem Definitionsbereich.

9.9 Satz. *Für* $N \in \mathbb{N}_0$ *gilt*

$$\left| \exp(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} \right| \leq 2 \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \quad \textit{falls } |x| \leq 1 + \frac{N}{2}.$$

Damit kann man die *Eulersche Zahl* $e = \exp(1)$ so genau ausrechnen, wie man möchte: $e = 2.7182818285\ldots$.

9.10 Satz. *Die Exponentialfunktion ist stetig.*

9.11 Satz. *Seien* $I, J \subseteq \mathbb{R}$ *Intervalle und* $f\colon I \to J$*,* $g\colon J \to \mathbb{R}$ *Funktionen. Ist* f *stetig in* $x_0 \in I$ *und* g *stetig in* $f(x_0)$*, so ist* $g \circ f$ *stetig in* x_0*.*

9.12 Beispiel. Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \exp(-x^2)$, ist stetig. Ihr Graph ist die *Gaußsche Glockenkurve.*

9.13 Definition. Intervalle der Form $[a, b]$ mit reellen Zahlen $a < b$ heißen *kompakt.*

9.14 Theorem (Nullstellensatz von Bolzano). *Es seien* $a, b \in \mathbb{R}$*, und es sei* $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion mit* $f(a) < 0$ *und* $f(b) > 0$*. Dann gibt es ein* $c \in \,]a, b[$ *mit* $f(c) = 0$*.*

9.15 Theorem (Zwischenwertsatz). *Sei* $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *stetig. Dann nimmt* f *alle Werte zwischen* $f(a)$ *und* $f(b)$ *an.*

9.16 Korollar. *Sei* I *ein Intervall und* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *stetig. Dann ist* $f(I)$ *ein Intervall.*

Man beachte, dass auch einpunktige Mengen Intervalle sind.

9.17 Satz. *Sei* $I = [a, b]$ *ein kompaktes Intervall und sei* $f \colon I \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion. Dann nimmt* f *auf* I *ihr Maximum und ihr Minimum an, d. h. es gibt* $c, d \in I$, *so dass* $f(c) = \max\{f(x) \mid a \leq x \leq b\}$ *und* $f(d) = \min\{f(x) \mid a \leq x \leq b\}$.

9.18 Definition. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f \colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wenn für alle $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 < x_2$ gilt, dass $f(x_1) \leq f(x_2)$, dann heißt f *monoton wachsend.* Wenn sogar immer $f(x_1) < f(x_2)$ gilt, dann heißt f *streng monoton wachsend.* Entsprechend erklärt man (streng) monoton fallend.

9.19 Bemerkung. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f \colon I \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend. Wegen Korollar 9.16 ist $f(I) = J$ ein Intervall. Dann ist $f \colon I \to J$ bijektiv und besitzt daher eine Umkehrfunktion $f^{-1} \colon J \to I$. Die Umkehrfunktion f^{-1} ist streng monoton wachsend. Die analogen Aussagen gelten für streng monoton fallendes f.

9.20 Satz. *Die Umkehrfunktion einer auf einem Intervall erklärten stetigen, streng monotonen Funktion ist stetig.*

9.21 Beispiel. Die Quadratwurzeln hatten wir schon definiert. Jetzt können wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ die n-te Wurzel definieren.

(a) Ist n eine ungerade natürliche Zahl, so ist die Abbildung $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$, streng monoton wachsend und stetig. Wegen des Zwischenwertsatzes ist sie auch bijektiv. Sie besitzt also eine stetige Umkehrfunktion $f^{-1} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt[n]{x}$.

(b) Ist n eine gerade natürliche Zahl, so ist die Abbildung $f \colon [0, \infty[\to [0, \infty[$, $x \mapsto x^n$, streng monoton wachsend und stetig. Sie ist ebenfalls bijektiv. Sie besitzt also eine stetige Umkehrfunktion $f^{-1} \colon [0, \infty[\to [0, \infty[$, $x \mapsto \sqrt[n]{x}$.

9.22 Satz (Wurzelkriterium). *Es sei* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *eine Folge. Wenn es* $N \in \mathbb{N}$ *und* $w < 1$ *gibt, so dass*

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq w \quad \textit{für alle } n \geq N,$$

dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolut.*

9.23 Bezeichnung. Für $h > 0$ gilt

$$\exp(h) = 1 + h + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{h^n}{n!} > 1 + h, \tag{9.1}$$

also $\exp(x + h) = \exp(x)\exp(h) > \exp(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$. Daher ist die Exponentialfunction streng monoton wachsend. Die Abschätzung (9.1) zeigt auch, dass $\exp(\mathbb{R})$ nach oben unbeschränkt ist. Wegen $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ folgt, dass $\exp(\mathbb{R}) =]0, \infty[$. Die Exponentialfunktion besitzt also eine stetige Inverse, die man als *natürlichen Logarithmus* bezeichnet und als $\log(x)$ schreibt.

Aus den Eigenschaften der Exponentialfunktion folgt

$$\begin{aligned} \log(1) &= 0, \\ \log(e) &= 1, \\ \log(xy) &= \log x + \log y \quad \text{für } x, y > 0. \end{aligned}$$

10 Die komplexen Zahlen

10.1 Definition. Auf $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definiert man eine Addition und eine Multiplikation durch

$$\begin{aligned}(x, y) + (u, v) &= (x + u, y + v)\\ (x, y) \cdot (u, v) &= (xu - yv, xv + yu).\end{aligned}$$

10.2 Satz. *Diese Rechenoperationen erfüllen die Körperaxiome.*

10.3 Bemerkung. (a) Die Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (x, 0)$, ist injektiv und mit den Rechenoperationen verträglich. Man versteht daher $\mathbb{R}$ als Teilkörper von $\mathbb{R}^2$ mit den Operationen aus 10.1 und schreibt für $(x, 0)$ einfach wieder x.

(b) Man setzt $i = (0, 1)$. Dann $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$. Ferner gilt für $y \in \mathbb{R}$, dass $iy = (0, 1) \cdot (y, 0) = (0, y)$. Also $(x, y) = (x, 0) + (0, y) = x + iy$. Wir werden in Zukunft die Schreibweise $x + iy$ benutzen. Dann lauten die Rechenregeln

$$\begin{aligned}(x + iy) + (u + iv) &= (x + u) + (y + v)i,\\ (x + iy)(u + iv) &= (xu - yv) + (xv + uy)i.\end{aligned}$$

10.4 Bezeichnung. Man bezeichnet $\mathbb{R}^2$, versehen mit diesen Rechenregeln, als den Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen. Für $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ bezeichnet man x als *Realteil* und y als *Imaginärteil* von z. Man schreibt $x = \mathrm{Re}(z)$ und $y = \mathrm{Im}(z)$.

10.5 Definition. Ist $z = x+iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, so heißt $\bar{z} = x-iy$ die zu z *konjugiert komplexe Zahl.*

10.6 Beispiel. (a) $\bar{i} = -i$.

(b)
$$\frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}.$$

(c) $(1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$, also

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^2 = i \quad \text{und} \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^8 = 1.$$

(d) $(1+\sqrt{3}i)^2 = -2+2\sqrt{3}i$, also $(1+\sqrt{3}i)^3 = 2(-1+\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i) = 2(-1-3) = -8$. Also
$$\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^6 = 1.$$

10.7 Satz. *Für $z, w \in \mathbb{C}$ gelten*

(a) $\overline{\overline{z}} = z$,

(b) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$,

(c) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$,

(d) $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z+\overline{z})$ *und* $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z-\overline{z})$,

(e) $z\overline{z} \in \mathbb{R}$ *mit* $z\overline{z} \geq 0$.

10.8 Definition. Der *Absolutbetrag* von $z \in \mathbb{C}$ ist definiert als
$$|z| := \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2+y^2},$$
wobei $x = \operatorname{Re} z$ und $y = \operatorname{Im} z$.

Für reelles x stimmt diese Definition von $|x|$ mit der aus 4.13 überein.

10.9 Satz. *Für $z, w \in \mathbb{C}$ gelten*

(a) $|zw| = |z||w|$,

(b) $|\overline{z}| = |z|$.

(c) (Dreiecksungleichung) $|z+w| \leq |z| + |w|$.

(d) $||z| - |w|| \leq |z-w|$.

Daher bezeichnet man $|z-w|$ als den Abstand der komplexen Zahlen z und w. Wer einen Abstandsbegriff hat, der hat auch einen Konvergenzbegriff.

10.10 Definition. Es sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$, und es sei $z_0 \in \mathbb{C}$. Die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen z_0, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $|z_n - z_0| < \epsilon$ für alle $n \geq N$. Man schreibt in diesem Fall $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$.

10.11 Satz. *Es sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Die Folge ist genau dann konvergent, wenn die reellen Folgen $(\operatorname{Re}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\operatorname{Im}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren. In diesem Fall gilt*
$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \operatorname{Re}(z_n) + i \lim_{n\to\infty} \operatorname{Im}(z_n).$$

Daraus sieht man, dass die Rechenregeln 5.15 auch für komplexe Folgen gelten.

10.12 Satz (Cauchy-Kriterium). *Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Dann sind äquivalent:*

(a) Die Folge konvergiert.

(b) Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n, m \geq N$ gilt $|z_n - z_m| < \epsilon$.

10.13 Definition. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$, und es sei $s_n = \sum_{j=1}^{n} a_j$ die n-te Partialsumme. Man sagt, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, wenn die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. In diesem Fall ist $\lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ der Reihenwert.

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_j$ heißt absolut konvergent, wenn die Reihe $\sum_{n\to\infty} |a_n|$ konvergiert.

10.14 Satz. *Majorantenkriterium, Quotientenkriterium, Umordnungssatz, Wurzelkriterium und der Satz über das Cauchy-Produkt gelten auch für komplexe Reihen.*

10.15 Definition. Die komplexe Exponentialfunktion ist durch dieselbe Reihe definiert wie die reelle:

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Die Abschätzung aus Satz 9.9 gilt auch über den komplexen Zahlen.

Der Körper $\mathbb{C}$ ist nicht angeordnet. Beweise, welche die Monotonie verwenden, übertragen sich daher nicht. Beispielsweise werden wir sehen, dass die komplexe Exponentialfunktion nicht injektiv ist.

10.16 Definition. Es seien $D \subseteq \mathbb{C}$ und $f\colon D \to \mathbb{C}$ eine Funktion.

(a) f heißt stetig in $z_0 \in D$, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $z \in D$ mit $|z - z_0| < \delta$ gilt $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$. Ferner heißt f stetig, wenn f in jedem Punkt ihres Definitionsbereichs stetig ist.

(b) Es gilt $\lim_{z\to z_0} f(z) = w$, wenn für jede Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $D\setminus\{z_0\}$ mit $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$ gilt $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = w$.

10.17 Satz. *Es sei $f\colon D \to \mathbb{C}$ und es sei $z_0 \in D$. Dann sind äquivalent:*

(a) f ist stetig in z_0.

(b) $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$.

10.18 Satz. *Die Rechenregeln für stetige Funktionen (Sätze 9.6 und 9.11) gelten auch für komplexe Funktionen. Insbesondere sind Polynome stetig auf ganz $\mathbb{C}$ und gebrochen rationale Funktionen sind auf ihrem Definitionsbereich stetig.*

Die Exponentialfunktion $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist stetig.

11 Elementare Funktionen

11.1 Definition. (a) Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Wir schreiben $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$, wenn es zu jedem $C \in \mathbb{R}$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $x_n > C$ für alle $n \geq N$. Wir schreiben $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$, wenn es zu jedem $C \in \mathbb{R}$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $x_n < C$ für alle $n \geq N$.

(b) Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ nach oben unbeschränkt, und es sei $f\colon D \to \mathbb{R}$. Für $a \in \mathbb{R}$ oder $a = \pm\infty$ schreiben wir $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$, wenn für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D mit $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ gilt, dass $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = a$. Analog für $-\infty$.

Achtung: Beispielsweise für die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = (-1)^n n$ gilt weder $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ noch $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Exponentialfunktion

11.2 Satz (Eigenschaften der reellen Exponentialfunktion). *(a) Für jedes* $x \in \mathbb{R}$ *ist* $\exp(x) > 0$.

(b) $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ist streng monoton wachsend.*

(c) $\exp(\mathbb{R}) =]0, \infty[$.

(d) Für jedes $m \in \mathbb{N}$ *gilt*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\exp(x)}{x^m} = \infty$$

11.3 Satz (Eigenschaften der komplexen Exponentialfunktion). *(a) Für alle* $z, w \in \mathbb{C}$ *gilt* $\exp(z + w) = \exp(z)\exp(w)$.

(b) Für jedes $z \in \mathbb{C}$ *ist* $\exp(z) \neq 0$ *und*

$$\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}.$$

(c) Für jedes $z \in \mathbb{C}$ *ist* $\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$.

(d) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ *ist* $|\exp(ix)| = 1$.

Der Logarithmus

Den natürlichen Logarithmus hatten wir in 9.23 definiert und mit log abgekürzt.

11.4 Satz. *(a) Der natürliche Logarithmus ist stetig und streng monoton wachsend.*

(b) Für $x \in \mathbb{R}$ *ist* $\log(\exp(x)) = x$, *für* $x > 0$ *ist* $\exp(\log(x)) = x$.

(c) $\log(]0, \infty[) = \mathbb{R}$.

(d) Für $x, y > 0$ *ist* $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$.

(e) $\log(1) = 0$, $\log(e) = 1$.

(f) Für $x > 0$ *ist* $\log(1/x) = -\log(x)$.

(g) $\lim_{x\to\infty} \log(x) = \infty$ *und* $\lim_{x\searrow 0} \log(x) = -\infty$.

(h) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\log x}{x} = 0$.

Die allgemeine Potenzfunktion

11.5 Definition. Für $a > 0$ und $z \in \mathbb{C}$ definieren wir $a^z = \exp(z \log a)$.

11.6 Bemerkung. (a) Man überlegt sich leicht, dass diese Definition mit den bereits bestehenden Spezialfällen a^n, a^{-1} und $a^{1/n}$ kompatibel ist.

(b) Es gilt speziell $e^z = \exp(z)$.

11.7 Satz. *(a) Für* $a > 0$ *und* $x, y \in \mathbb{R}$ *gilt* $(a^x)^y = a^{xy}$.

(b) Für $a > 0$ *und* $z, w \in \mathbb{C}$ *gilt* $a^{z+w} = a^z a^w$.

(c) Für $a, b > 0$ *und* $z \in \mathbb{C}$ *gilt* $(ab)^z = a^z b^z$.

(d) Für $a > 0$ *und* $z \in \mathbb{C}$ *gilt* $\left(\frac{1}{a}\right)^z = a^{-z}$.

Trigonometrische Funktionen

11.8 Definition. Für $z \in \mathbb{C}$ bezeichnet $\sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$ den *Sinus* von z und $\cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$ den *Cosinus* von z.

11.9 Satz. *(a) Für alle* $x \in \mathbb{R}$ *gelten* $\cos(x) = \mathrm{Re}(\exp(ix))$ *und* $\sin(x) = \mathrm{Im}(\exp(ix))$.

(b) *Sinus und Cosinus sind stetig.*

(c) *Für alle* $z \in \mathbb{C}$ *gilt* $e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z)$ *(Eulersche Formel).*

(d) *Für alle* $z \in \mathbb{C}$ *gelten* $\cos(-z) = \cos(z)$ *und* $\sin(-z) = -\sin(z)$.

(e) *Für jedes* $z \in \mathbb{C}$ *gilt der* trigonometrische Pythagoras:

$$\sin(z)^2 + \cos(z)^2 = 1.$$

11.10 Satz. *Für alle* $z \in \mathbb{C}$ *gelten*

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

11.11 Satz (Additionstheoreme). *Für* $z, w \in \mathbb{C}$ *gelten*

$$\sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$$
$$\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w).$$

Speziell gelten $\sin(2z) = 2\sin(z)\cos(z)$ *und* $\cos(2z) = \cos(z)^2 - \sin(z)^2 = 2\cos(z)^2 - 1$.

11.12 Lemma. *Für* $z, w \in \mathbb{C}$ *gilt*

$$\cos w - \cos z = -2\sin\left(\frac{w-z}{2}\right)\sin\left(\frac{z+w}{2}\right).$$

11.13 Beispiel. Für $0 \leq x \leq \sqrt{12}$ erhalten wir aus dem Konvergenzkriterium von Leibniz, indem wir die Einschließung wie in Beispiel ?? verfeinern

$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}, \quad x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

Speziell gilt $\cos(2) \leq 1 - 2 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$.

Aus dem Zwischenwertsatz folgt, dass der Cosinus im Intervall $]0, 2[$ mindestens eine Nullstelle besitzt. Das folgende Lemma zeigt die Eindeutigkeit dieser Nullstelle.

11.14 Lemma. *Die Cosinusfunktion ist auf dem Intervall* $[0, 2]$ *streng monoton fallend.*

11.15 Definition. Die *Kreiszahl* π ist dadurch definiert, dass $\frac{\pi}{2}$ die Nullstelle des Cosinus im Intervall $]0, 2[$ ist.

11.16 Satz. (a) $\exp(i\frac{\pi}{2}) = i$.

(b) $e^{i\pi} = -1$.

(c) $e^{2\pi i} = 1$.

11.17 Satz. *(a) Für alle* $z \in \mathbb{C}$ *gelten* $\sin(z + \frac{\pi}{2}) = \cos z$ *und* $\cos(z + \frac{\pi}{2}) = -\sin z$.

(b) Für alle $z \in \mathbb{C}$ *gelten* $\sin(z + \pi) = -\sin z$ *und* $\cos(z + \pi) = -\cos z$.

(c) Sinus und Cosinus sind periodisch mit Periode 2π*. Das bedeutet, dass für alle* $z \in \mathbb{C}$ *die Aussagen* $\sin(z + 2\pi) = \sin z$ *und* $\cos(z + 2\pi) = \cos z$ *gelten.*

(d) $\{x \in \mathbb{R} \mid \cos x = 0\} = \left\{\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

(e) $\{x \in \mathbb{R} \mid \sin x = 0\} = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

11.18 Bemerkung. Wir kennen nun unter anderem die folgenden speziellen Werte der trigonometrischen Funktionen

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	0	0
$\cos x$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	1

11.19 Definition. Für $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ definiert man

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ definiert man

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen

11.20 Satz. *(a) Die Funktion* $\cos$ *ist auf dem Intervall* $[0, \pi]$ *streng monoton fallend und bildet es bijektiv auf* $[-1, 1]$ *ab. Ihre Umkehrfunktion ist*

$$\arccos\colon [-1, 1] \to [0, \pi].$$

(b) Die Funktion $\sin$ *ist auf dem Intervall* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *streng monoton wachsend und bildet es bijektiv auf* $[-1, 1]$ *ab. Ihre Umkehrfunktion ist*

$$\arcsin\colon [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

(c) Die Funktion $\tan$ *ist auf dem Intervall* $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ *streng monoton wachsend und bildet es bijektiv auf* $\mathbb{R}$ *ab. Ihre Umkehrfunktion ist*

$$\arctan\colon \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Polarkoordinaten

11.21 Bemerkung. (a) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $\exp(z + 2\pi i) = \exp(z)$. Man sagt: "exp hat die Periode $2\pi i$."

(b) Ist $x \in \mathbb{R}$, so gilt $\exp(ix) = 1$ genau dann, wenn $x = 2k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.

11.22 Lemma (Polarkoordinaten). *Ist $z \in \mathbb{C}$, so existieren $\varphi \in]-\pi, \pi]$ und $r \geq 0$ mit*

$$z = re^{i\varphi}.$$

11.23 Bemerkung. (a) Für $z \neq 0$ werden die Polarkoordinaten wie folgt bestimmt

$$r = |z|, \quad \varphi(z) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}\right), & \text{falls } \operatorname{Re} z > 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{falls } \operatorname{Re} z = 0 \text{ und } \operatorname{Im} z > 0, \\ \arctan\left(\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}\right) + \pi, & \text{falls } \operatorname{Re} z < 0 \text{ und } \operatorname{Im} z \geq 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{falls } \operatorname{Re} z = 0 \text{ und } \operatorname{Im} z < 0, \\ \arctan\left(\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}\right) - \pi, & \text{falls } \operatorname{Re} z < 0 \text{ und } \operatorname{Im} z < 0. \end{cases}$$

(b) $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Landau-Symbole

Die Landau-Symbole bezeichnen *keine* Funktionen.

11.24 Definition. Man schreibt

$$f(x) = o(g(x)), \quad x \to a,$$

falls

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

und

$$f(x) = O(g(x)), \quad x \to a,$$

falls $\frac{|f|}{g}$ in einer Umgebung von a beschränkt ist. Unter einer Umgebung verstehen wir ein Intervall der Form $]a - \epsilon, a + \epsilon[$, wenn $a \in \mathbb{R}$, der Form $]\frac{1}{\epsilon}, \infty[$, wenn $a = \infty$, bzw. der Form $]-\infty, -\frac{1}{\epsilon}[$, wenn $a = -\infty$, wobei in allen Fällen $\epsilon > 0$.

11.25 Beispiel. (a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $x^n = o(\exp(x))$, $x \to \infty$.

(b) $\log x = o(\frac{1}{x})$, $x \to 0$.

(c) $\cos x = O(1)$, $x \to \infty$.

11.26 Beispiel.

$$\frac{\pi}{2} - \arctan x = O\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{und} \quad \frac{1}{x} = O\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right), \qquad x \to \infty.$$

12 Differenzierbarkeit

12.1 Definition. $D \subseteq \mathbb{R}$ heißt *offen,* wenn D Vereinigung von offenen Intervallen ist.

12.2 Definition. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ offen, sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, und sei $x_0 \in D$. Falls

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'(x_0)$$

existiert (in $\mathbb{R}$), dann sagt man, f sei in x_0 *differenzierbar.* In diesem Fall bezeichnet man $f'(x_0)$ als *Ableitung* von f in x_0. Ist f in jedem Punkt von D differenzierbar, so heißt f differenzierbar in D.

Falls der Grenzwert

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert, so bezeichnet man ihn als *rechtsseitige Ableitung.* Analog definiert man die linksseitige Ableitung.

Bemerkung. Je nach Kontext schreibt man auch $\frac{df}{dx}$ oder $\dot{f}$ für die Ableitung.

12.3 Satz. *Es seien $D \subseteq \mathbb{R}$ offen, $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in D$. Dann ist f genau dann differenzierbar in x_0, wenn es eine in x_0 stetige Funktion $\varphi\colon D \to \mathbb{R}$ gibt mit*

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)\varphi(x)$$

für alle $x \in D$. In diesem Fall gilt $\varphi(x_0) = f'(x_0)$.

12.4 Satz. *Wenn f in x_0 differenzierbar ist, dann ist f in x_0 stetig.*

12.5 Lemma. *Eine Funktion f ist genau dann differenzierbar in x_0, wenn die rechts- und die linksseitige Ableitung in x_0 existieren und übereinstimmen.*

12.6 Beispiel. (a) Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die konstante Funktion $f(x) = c$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann ist f differenzierbar mit $f' = 0$.

(b) Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann ist f differenzierbar mit $f' = 1$.

(c) $f(x) = |x|$ ist im Ursprung nicht differenzierbar.

(d) $\exp' = \exp$.

(e) $\cos' = -\sin$.

(f) Die Formel $\sin' = \cos$ zeigen wir in Beispiel 12.10.

12.7 Satz (Rechenregeln). *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ offen, seien $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ differenzierbar.*

(a) $f + g$ ist differenzierbar mit $(f+g)' = f' + g'$.

(b) (Produktregel) fg ist differenzierbar mit $(fg)' = f'g + g'f$.

(c) Ist $c \in \mathbb{R}$, so ist cf differenzierbar mit $(cf)' = cf'$.

(d) Ist $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$, so ist $\frac{f}{g}$ differenzierbar mit

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}.$$

12.8 Korollar. *Polynome sind differenzierbar. Genauer gilt für $p(x) = \sum_{n=0}^{m} a_n x^n$, dass $p'(x) = \sum_{n=1}^{m} a_n n x^{n-1}$. Gebrochen rationale Funktionen sind überall dort differenzierbar, wo sie definiert sind.*

12.9 Satz (Kettenregel). *Seien $D, E \subseteq \mathbb{R}$ offen und $f\colon D \to E$ und $g\colon E \to \mathbb{R}$ Funktionen. Ist f differenzierbar in $x_0 \in D$ und g differenzierbar in $f(x_0)$, dann ist $g \circ f$ differenzierbar in x_0, und es gilt*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

12.10 Beispiel. (a) $\sin' = \cos$, denn $\sin x = -\cos(x + \frac{\pi}{2})$. Daher $\sin' x = \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$.

(b) $\tan'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$.

12.11 Satz. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f\colon D \to \mathbb{R}$ stetig und invertierbar. Sei $x_0 \in D$, sei f in x_0 differenzierbar mit $f'(x_0) \neq 0$. Sei g die Umkehrfunktion von f. Dann ist g in $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar und*

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(g(y_0))}.$$

12.12 Beispiel. (a) $\log'(y) = \frac{1}{y}$.

(b) Für $y \neq 0$ ist die Ableitung von $\sqrt[3]{y}$ gleich $\frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}$, denn $\sqrt[3]{y}$ ist die Umkehrfunktion von $f\colon x \mapsto x^3$. Man beachte, dass die Voraussetzungen des Satzes in $x = 0$ nicht erfüllt sind.

12.13 Satz. *Für $x \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

12.14 Beispiel. (a) $\arctan'(y) = \dfrac{1}{1+y^2}$.

(b) $\arcsin'(y) = \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ für $-1 < y < 1$.

Beweis. Setze $f(x) = \sin(x)$ und $g(y) = \arcsin(y)$. Für $y \in \,]-1, 1[$ gelten $\arcsin(y) \in \,]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ und $\cos(\arcsin(y)) > 0$.

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\cos(\arcsin(y))} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}. \qquad \square$$

12.15 Definition. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ offen. Ist f differenzierbar in D und f' differenzierbar in $x_0 \in D$, so heißt f *zweimal differenzierbar* in x_0. Man schreibt dann $f''(x_0)$. Analog definiert man f'''. Wenn das nicht reicht, geht man zu folgender Notation über:

$$f^{(0)} = f, \quad f^{(1)} = f', \quad f^{(2)} = f'', \quad \ldots \quad f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'.$$

12.16 Beispiel. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei $f\colon]0, \infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^\alpha$. Dann folgt aus der Kettenregel und $x^\alpha = \exp(\alpha \log x)$

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}, \quad f''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}, \quad f'''(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}.$$

13 Der Mittelwertsatz

13.1 Definition. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, und sei $x_0 \in D$. Wir sagen, dass f in x_0 ein *(globales) Maximum* hat, wenn f keinen größeren Funktionswert als $f(x_0)$ annimmt. In diesem Fall bezeichnet man x_0 als *Maximalstelle.* Analog definiert man Minima und Minimalstellen. Eine Stelle, an der ein Minimum oder ein Maximum vorliegt, bezeichnet man als *Extremalstelle.*

Beispiel. Der Cosinus hat in jedem Punkt der Form $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, eine Maximalstelle. Das Maximum ist 1.

13.2 Definition. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, sei $f\colon D \to \mathbb{R}$, und sei $x_0 \in D$. Wir sagen, dass f in x_0 ein *lokales Maximum* hat, wenn es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass gilt:

ist $x \in D$ mit $|x - x_0| < \epsilon$, so ist $f(x) \leq f(x_0)$.

In diesem Fall bezeichnet man x_0 als *lokale Maximalstelle.* Wenn sogar gilt:

ist $x \in D$ mit $0 < |x - x_0| < \epsilon$, so ist $f(x) < f(x_0)$,

dann ist x_0 eine *strikte* lokale Maximalstelle. Analoge Definitionen gelten für Minima und Extrema.

13.3 Satz. *Sei* $f\colon]a, b[\to \mathbb{R}$ *eine Funktion. Sei* $x_0 \in]a, b[$ *eine lokale Extremalstelle von* f. *Falls* f *in* x_0 *differenzierbar ist, so gilt* $f'(x_0) = 0$.

13.4 Definition. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ offen und $f\colon D \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Falls $f'(x_0) = 0$, so heißt x_0 *kritische Stelle* von f.

Beispiel. Die Umkehrung von Satz 13.3 gilt nicht. Beispielsweise besitzt $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$, in $x_0 = 0$ eine kritische Stelle.

13.5 Satz (Satz von Rolle). *Es sei* $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion, die auf* $]a, b[$ *differenzierbar ist. Falls* $f(a) = f(b)$, *so gibt es ein* $x \in]a, b[$ *mit* $f'(x) = 0$.

13.6 Theorem (Mittelwertsatz). *Es sei* $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion, die auf* $]a, b[$ *differenzierbar ist. Dann gibt es ein* $x \in]a, b[$ *mit*

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

13.7 Satz. *Sei* $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ *differenzierbar mit* $f'(x) = 0$ *für alle* $x \in]a,b[$. *Dann ist* f *konstant.*

13.8 Satz. *Sei* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *stetig und auf* $]a,b[$ *differenzierbar. Dann gilt:*

(a) Falls $f'(x) > 0$ *für alle* $x \in]a,b[$*, so ist* f *streng monoton wachsend.*

(b) f *ist genau dann monoton wachsend, wenn* $f'(x) \geq 0$ *für alle* $x \in]a,b[$.

Beispiel. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$, ist streng monoton wachsend. Trotzdem besitzt f' eine Nullstelle im Ursprung.

13.9 Satz. *Sei* $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ *zweimal differenzierbar und sei* $x_0 \in]a,b[$ *ein kritischer Punkt von* f. *Falls* $f''(x_0) > 0$*, so besitzt* f *in* x_0 *ein striktes lokales Minimum. Falls* $f''(x_0) < 0$*, so besitzt* f *in* x_0 *ein striktes lokales Maximum.*

13.10 Beispiel. (a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x\cos(x)$. Dann $f'(x) = \cos(x) - x\sin(x)$. Wegen $f'(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}\frac{1}{2}\sqrt{2} > 0$ und $f'(\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2} < 0$ besitzt f' in $]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$ eine Nullstelle x_0. Dort gilt

$$f''(x_0) = -2\sin(x_0) - x_0\cos(x_0) < 0.$$

Also besitzt f in x_0 ein striktes lokales Maximum.

(b) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^4$, besitzt in $x_0 = 0$ ein striktes lokales Minimum (welches sogar global ist). Es gilt aber $f''(0) = 0$. Daher liefert Satz 13.9 kein notwendiges Kriterium.

(c) Betrachte die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x}{2} + x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Auf Blatt 9 wird gezeigt, dass f in ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist mit $f'(0) = \frac{1}{2}$ und dass f' unstetig im Ursprung ist. Ich zeige hier, dass es keine Umgebung von 0 gibt, in der f monoton wächst. Dem Graphen in Abbildung 13.1 kann man das nicht ansehen.

13.11 Satz (Verallgemeinerter Mittelwertsatz). *Seien* $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *stetig und in* $]a,b[$ *differenzierbar. Dann existiert* $x \in]a,b[$ *mit*

$$(f(b) - f(a))g'(x) = (g(b) - g(a))f'(x).$$

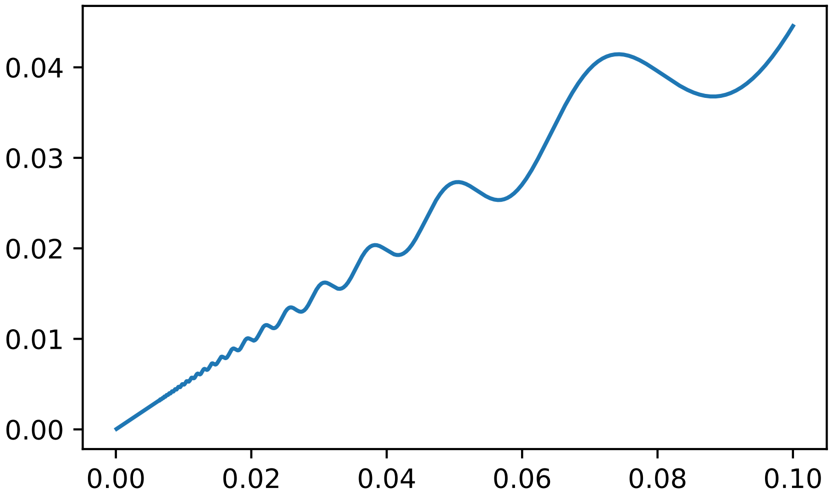

Abbildung 13.1: Graph der Funktion aus Beispiel 13.10 (c)

13.12 Beispiel. Für $I = [-1, 1]$ und $f\colon I \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^3 + 3x^2 + 2$, bestimmen wir $\sup f(I)$ und $\sup f(I)$.

Wir haben $f'(x) = 9x^2 + 6x = 3(3x+2)x$. Die kritischen Punkte sind also 0 und $-\frac{2}{3}$. Wir wissen aus Satz 9.17, dass f auf I das Maximum und das Minimum annimmt. Wir haben $f(-1) = 2$, $f\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{38}{9}$, $f(0) = 2$ und $f(1) = 8$. Wegen Satz 13.3 liegen die Extremalstellen am Rand oder sind kritisch. Also $\max f(I) = 8$ und $\min f(I) = 2$.

13.13 Satz (1. Regel von de l'Hôpital). *Die Funktionen f und g seien differenzierbar auf dem Intervall $]a, b[$, es sei $g'(x) \neq 0$ für alle x, und es gelte $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = 0 = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} g(x)$. Falls $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, so existiert auch $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, und beide Grenzwerte stimmen überein.*

13.14 Satz (2. Regel von de l'Hôpital). *Die Funktionen f und g seien differenzierbar auf dem Intervall $]a, b[$, es sei $g'(x) \neq 0$ für alle x, und es gelte $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} g(x) = \infty$. Falls $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, so existiert auch $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, und beide Grenzwerte stimmen überein.*

13.15 Bemerkung. Die Varianten der ersten und zweiten Regel von de l'Hôpital für $x \nearrow b$ und $x \to \pm\infty$ gelten ebenfalls. Die Regeln gelten außerdem für die Fälle $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$ und $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = -\infty$.

13.16 Beispiel. (a) $\displaystyle \lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\log x} \right) = \lim_{x \to 1} \frac{\log(x) - x + 1}{(x-1)\log x} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x} - 1}{\log(x) + \frac{x-1}{x}} = \lim_{x \to 1} \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 1} \frac{-1}{x+1} = -\frac{1}{2}.$

(b) $\lim\limits_{x \to \infty} x\,(\pi - 2\arctan x) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\pi - 2\arctan x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\frac{-2}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^2}{1+x^2} = 2.$

Dieses Beispiel verschärft die Aussage von Beispiel 11.26.

13.17 Definition. (a) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ heißt *konvex,* wenn für jede Wahl von $c, x, d \in I$ mit $c < x < d$ gilt

$$f(x) \leq f(c) + \frac{f(d) - f(c)}{d - c}(x - c).$$

f heißt *konkav,* wenn $-f$ konvex ist.

(b) Wenn es $\epsilon > 0$ gibt, so dass f auf $]c - \epsilon, c]$ konvex und auf $[c, c + \epsilon$ konkav oder auf $]c - \epsilon, c[$ konkav und auf $]c, c + \epsilon$ konvex ist, dann besitzt f in c einen *Wendepunkt.*

13.18 Beispiel. Die Betragsfunktion ist konvex.

13.19 Definition. Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt *konvex,* wenn zu je zwei Punkten $P, Q \in M$ die Verbindungsstrecke von P und Q in M liegt.

13.20 Bemerkung. $f\colon I \to \mathbb{R}$ ist genau dann konvex, wenn $\{(x, y) \mid x \in I,\ y \geq f(x)\}$ konvex ist.

13.21 Satz. $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *sei stetig und auf* $]a, b[$ *zweimal differenzierbar. Dann sind äquivalent*

(a) f *ist konvex,*

(b) f' *ist monoton wachsend,*

(c) $f''(x) \geq 0$ *für alle* $x \in]a, b[$.

13.22 Beispiel. Für $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ sei $f(x) = x^n$. Wenn n gerade ist, dann ist f konvex auf $\mathbb{R}$. Wenn n ungerade ist, dann ist f konvex auf $[0, \infty[$ und konkav auf $]-\infty, 0]$ und 0 ist ein Wendepunkt von f.

14 Integralrechnung

14.1 Definition. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Falls es $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ gibt mit $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, so dass f auf den Intervallen $]x_{k-1}, x_k[$, $k = 1, \ldots, n$, konstant ist, so heißt f *Treppenfunktion.* Die Menge $\{x_0, x_1, \ldots x_n\}$ ist die zur Treppenfunktion gehörende *Zerlegung* des Intervalls $[a, b]$.

Mit $\mathcal{T}[a, b]$ bezeichnen wir die Menge aller Treppenfunktionen auf $[a, b]$.

14.2 Bemerkung. Sind $f, g \in \mathcal{T}[a, b]$ und $c \in \mathbb{R}$, so sind auch cf und $f+g$ in $\mathcal{T}[a, b]$. Daher ist $\mathcal{T}[a, b]$ ein Untervektorraum des $\mathbb{R}$-Vektorraums aller Abbildungen von $[a, b]$ nach $\mathbb{R}$.

14.3 Definition. Ist $f \in \mathcal{T}[a, b]$, ist $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ und f konstant auf $]x_{k-1}, x_k[$ mit dem Wert c_k, so definiert man

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot (x_k - x_{k-1}).$$

14.4 Bemerkung. (a) Sind $f, g \in \mathcal{T}[a, b]$ und $c \in \mathbb{R}$, so gelten

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx \quad \text{und} \quad \int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Daher ist

$$\mathcal{T}[a, b] \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \int_a^b f(x)dx,$$

eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung.

(b) Sind $f, g \in \mathcal{T}[a, b]$ mit $f \le g$, also $f(x) \le g(x)$ für alle $x \in [a, b]$, so gilt

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx.$$

14.5 Definition. Sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann definieren wir *Ober-* und *Unterintegral* von f wie folgt:

$$\int_a^{b\,*} f(x)dx = \inf\Big\{\int_a^b \psi(x)dx \;\Big|\; \psi \in \mathcal{T}[a, b],\ \psi \ge f\Big\},$$

$$\int_{a\,*}^{b} f(x)dx = \sup\Big\{\int_a^b \varphi(x)dx \;\Big|\; \varphi \in \mathcal{T}[a, b],\ \varphi \le f\Big\}.$$

14.6 Definition. Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Sie heißt *Riemann-integrierbar,* wenn $\displaystyle\int_a^{b*} f(x)dx = \int_{a*}^{b} f(x)dx$. Den gemeinsamen Wert bezeichnet man mit $\int_a^b f(x)dx$ und nennt ihn das *(bestimmte) Integral* von f über $[a,b]$.

14.7 Satz (Riemann-Kriterium). *Für eine Funktion* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *sind gleichwertig:*

(a) f *ist Riemann-integrierbar.*

(b) Zu jedem $\epsilon > 0$ *gibt es Treppenfunktionen* $\varphi, \psi \in \mathcal{T}[a,b]$*, so dass* $\varphi \le f \le \psi$ *und*

$$\int_a^b (\psi(x) - \varphi(x))dx < \epsilon.$$

(c) Es gibt Folgen $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* $\mathcal{T}[a,b]$*, so dass für jedes* $n \in \mathbb{N}$ *gilt* $\varphi_n \le f \le \psi_n$ *und*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b (\psi_n(x) - \varphi_n(x))dx = 0.$$

Für je zwei Folgen $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *wie in (c) gilt* $\lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \psi_n(x)dx$.

14.8 Beispiel. Mit vollständiger Induktion zeigt man

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}.$$

Damit zeigt man, dass die Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, Riemann-integrierbar ist, indem man das Riemann-Kriterium überprüft. Es gilt $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$.

14.9 Satz. *Es seien* $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *Riemann-integrierbar, und es sei* $c \in \mathbb{R}$*. Dann gelten*

(a) cf *ist Riemann-integrierbar mit* $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$.

(b) $f + g$ *ist Riemann-integrierbar mit* $\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

14.10 Bezeichnung. Für eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ definieren wir Funktionen $f_+, f_-\colon D \to \mathbb{R}$ durch

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{falls } f(x) \ge 0, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \qquad f_-(x) = \begin{cases} -f(x), & \text{falls } f(x) \le 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gelten $f = f_+ - f_-$ und $|f| = f_+ + f_-$.

14.11 Satz. *Für Riemann-integrierbare Funktionen* $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *gelten:*

(a) f_+ *und* f_- *sind Riemann-integrierbar.*

(b) $|f|$ *ist Riemann-integrierbar, und es gilt*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \leq M(b-a),$$

wenn $M = \sup\{|f(x)| \mid a \leq x \leq b\}$.

(c) $\max(f,g)$ *und* $\min(f,g)$ *sind Riemann-integrierbar.*

14.12 Satz. *Für Riemann-integrierbare Funktionen* $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *gelten:*

(a) f^2 *ist Riemann-integrierbar.*

(b) $f \cdot g$ *ist Riemann-integrierbar.*

Satz 14.12 macht keine Aussage über den Wert des Integrals.

14.13 Bezeichnung. Es sei $f\colon D \to W$ eine Abbildung. Es sei $E \subseteq D$. Die *Einschränkung* von f auf E ist diejenige Abbildung auf E, welche dieselbe Abbildungsvorschrift wie f besitzt. In Zeichen:

$$f|_E\colon E \to W, \quad x \mapsto f(x).$$

14.14 Satz. *Es seien* $a < b < c$. *Eine Funktion* $f\colon [a,c] \to \mathbb{R}$ *ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn* $f|_{[a,b]}$ *und* $f_{[b,c]}$ *beide Riemann-integrierbar sind. In diesem Fall gilt*

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

14.15 Bezeichnung. Man setzt $\int_a^a f(x)dx = 0$ und für $a < b$

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

14.16 Satz. *Jede monotone Funktion* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *ist Riemann-integrierbar.*

14.17 Definition. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Sie heißt *gleichmäßig stetig,* wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x, y \in D$ mit $|x-y| < \delta$ gilt $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

14.18 Beispiel. $f\colon]0,\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$, ist nicht gleichmäßig stetig.

14.19 Satz. *Jede auf einem kompakten Intervall* $[a,b]$ *stetige Funktion ist gleichmäßig stetig.*

14.20 Satz. *Jede stetige Funktion* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *ist Riemann-integrierbar.*

14.21 Satz. *Sei* $I \subseteq \mathbb{R}$ *ein offenes Intervall, sei* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *stetig, und sei* $c \in I$. *Definiert man*

$$F\colon I \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_c^x f(t)dt,$$

so ist F *differenzierbar mit* $F' = f$.

14.22 Definition. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, und sei $f\colon I \to \mathbb{R}$. Eine differenzierbare Funktion $F\colon I \to \mathbb{R}$ heißt *Stammfunktion* oder *unbestimmtes Integral* von f, wenn $F' = f$.

14.23 Bemerkung. (a) Ist F eine Stammfunktion zu f, so schreibt man $F(x) = \int f(x)dx$.

(b) Zwei Stammfunktionen unterscheiden sich lediglich durch eine Konstante.

14.24 Theorem (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung). *Sei* $I \subseteq \mathbb{R}$ *ein offenes Intervall, sei* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *stetig und sei* F *eine Stammfunktion von* f. *Dann gilt für alle* $a, b \in I$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Bezeichnung. Schreibweise

$$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

14.25 Beispiel. (a) $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ ist eine Stammfunktion für $f(x) = x^2$. Also

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

(b) $F(x) = \log|x|$ ist eine Stammfunktion für $f(x) = \frac{1}{x}$. Also

$$\int_{-e^2}^{-e} \frac{1}{x}dx = \log|x|\Big|_{-e^2}^{-e} = \log(e) - \log(e^2) = -1.$$

14.26 Theorem (Mittelwertsatz der Integralrechnung). *Es sei* $p\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *Riemann-integrierbar mit* $p(x) \geq 0$ *für alle* x *und es sei* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *stetig. Dann gibt es* $\xi \in \,]a,b[$ *mit*

$$\int_a^b f(x)p(x)\ dx = f(\xi)\int_a^b p(x)\ dx.$$

14.27 Satz (Partielle Integration). *Sei* $I \subseteq \mathbb{R}$ *ein offenes Intervall, seien* $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ *differenzierbar und* f', g' *stetig. Dann*

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

14.28 Beispiel. (a) $\int xe^x dx = e^x(x-1)$.

(b) $\int \log(x) dx = x\log(x) - x$.

(c) $\int \cos^2 x \; dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sin(x)\cos(x)$.

Das macht man mit partieller Integration:

$$\begin{aligned}\int \cos(x)\cos(x) \; dx &= \cos(x)\sin(x) - \int (-\sin(x))\sin(x) \; dx \\ &= \sin(x)\cos(x) + \int 1 \; dx - \int \cos^2(x) \; dx.\end{aligned}$$

14.29 Satz (Substitutionsregel). *Seien* $I, J \subseteq \mathbb{R}$ *offene Intervalle, sei* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *stetig und sei* $\varphi\colon J \to I$ *differenzierbar mit stetiger Ableitung. Dann gilt für* $a, b \in J$

$$\int_a^b f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx.$$

14.30 Beispiel. (a)

$$\int_a^b f(2t) dt = \frac{1}{2}\int_{2a}^{2b} f(x) dx.$$

(b) Für $-1 < x < 1$ berechnen wir die Stammfunktion von $\sqrt{1-x^2}$ mittels der Substitution $x = \sin(t)$

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-x^2} \; dx &= \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos(t) \; dt \\ &= \int \cos^2(t) \; dt \\ &= \frac{t}{2} + \frac{1}{2}\sin(t)\cos(t) \\ &= \frac{1}{2}\arcsin(x) + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}.\end{aligned}$$

Insbesondere ist der Flächeninhalt des Einheitskreises gleich

$$2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} \; dx = \arcsin(1) - \arcsin(-1) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

(c) (Logarithmisches Integral) Ist $\varphi\colon I \to \mathbb{R}\setminus\{0\}$ differenzierbar mit stetiger Ableitung, so gilt

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx = \log|\varphi(x)|.$$

14.31 Satz (Partialbruchzerlegung). *Es seien* P *und* Q *komplexe Polynome. Das Polynom* Q *besitze eine Zerlegung in Linearfaktoren der Form* $Q(z) = \alpha\prod_{j=1}^{r}(z-$

$z_j)^{m_j}$ *mit* $\alpha \in \mathbb{C}$*, paarweise verschiedenen* $z_1, \ldots, z_r \in \mathbb{C}$ *und* $m_1, \ldots, m_r \in \mathbb{N}$. *Dann gibt es ein komplexes Polynom* T *und Zahlen* $A_{j,k} \in \mathbb{C}$*, so dass*

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = T(z) + \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{m_j} \frac{A_{j,k}}{(z - z_j)^k}.$$

Das Polynom T *und die Zahlen* $c_{j,k}$ *sind eindeutig bestimmt.*

14.32 Korollar. *Es seien* P *und* Q *reelle Polynome. Das Polynom* Q *besitze eine Zerlegung in Faktoren der Form*

$$Q(x) = \alpha \left(\prod_{j=1}^{r} (x - x_j)^{m_j} \right) \left(\prod_{i=1}^{s} (x^2 + b_i x + c_i) \right),$$

mit $\alpha, x_1, \ldots, x_r, b_1, \ldots b_s, c_1, \ldots, c_s \in \mathbb{R}$ *und* $m_1, \ldots, m_r \in \mathbb{N}$*, wobei die* x_j *paarweise verschiedenen sind, die quadratischen Polynome* $x^2 + b_i x + c_i$ *keine reellen Nullstellen besitzen und paarweise verschieden sind. Dann gibt es ein reelles Polynom* T *und Zahlen* $A_{j,k}, B_i, C_I \in \mathbb{R}$*, so dass*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = T(x) + \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{m_j} \frac{A_{j,k}}{(x - x_j)^k} + \sum_{i=1}^{s} \frac{B_i x + C_i}{x^2 + b_i x + c_i}.$$

Satz 14.31 findet man als Theorem 28.3 in Kaballo [Kab00]. Kaballo argumentiert allerdings mit komplexen Stammfunktionen. Wenn man das nicht will oder im reellen Fall größere Allgemeinheit als in unserem Korollar benötigt, dann kann man Mangoldt und Knopp [MK57] konsultieren.

Der Algorithmus ist in allen Computeralgebraprogrammen, wie beispielsweise SymPy, implementiert.

14.33 Bemerkung. In der Praxis bestimmt man T durch Division mit Rest und anschließend die Koeffizienten durch Vergleich.

14.34 Beispiel. Man bestimme eine Stammfunktion von $f(x) = \frac{x^4 - 10x^2 + 10x + 5}{x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 14x + 5}$.

Division mit Rest liefert $f(x) = 1 + \frac{6x^3 - 24x^2 + 24x}{x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 14x + 5}$. Man errät eine Nullstelle des Nenners, nämlich $x_1 = 1$. Division des Nenners durch $(x - 1)$ liefert $x^3 - 5x^2 + 9x - 5$. Man errät eine Nullstelle, und zwar wieder die 1. Neuerliche Division durch $x - 1$ führt zu

$$x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 14x + 5 = (x - 1)^2 (x^2 - 4x + 5).$$

Mit quadratischer Ergänzung sieht man $x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1$, also hat der letzte Faktor keine reelle Nullstelle. Der Ansatz gemäß Korollar ist also

$$f(x) - 1 = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 - 4x + 5}.$$

Wir bringen die rechte Seite auf den Hauptnenner. Dann ist der Zähler gleich

$$(a+c)x^3 + (-5a+b-2c+d)x^2 + (9a-4b+c-2d)x - 5a + 5b + d.$$

Wir lösen das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a + c &= 6, \\ -5a + b - 2c + d &= -24, \\ 9a - 4b + c - 2d &= 24, \\ -5a + 5b + d &= 0 \end{aligned}$$

und erhalten

$$f(x) = 1 + \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{6x-15}{x^2-4x+5}.$$

Das Integral des letzten Summanden muss zerlegt werden in ein logarithmisches Integral und eines, welches sich via Substitution auf einen Arkustangens zurückführen lässt.

$$\int \frac{6x-15}{x^2-4x+5}\,dx = \int \frac{6x-12}{x^2-4x+5}\,dx - \int \frac{3}{(x-2)^2+1}\,dx.$$

Insgesamt erhalten wir

$$\int \frac{x^4-10x^2+10x+5}{x^4-6x^3+14x^2-14x+5} = x - \frac{3}{x-1} + 3\log\left(x^2-4x+5\right) - 3\arctan(x-2)\,.$$

14.35 Bemerkung. Aus Kapitel 11 erhalten wir Tabelle 14.1 von Grundintegralen.

$f(x)$	$\int f(x)dx$	
$x^n, n \in \mathbb{N}_0$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$x \in \mathbb{R}$
$x^{-n}, n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$	$\frac{x^{-n+1}}{-n+1}$	$x \neq 0$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$x > 0$
$\frac{1}{x}$	$\log\|x\|$	$x \neq 0$
e^x	e^x	$x \in \mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$x \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	$x \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$\|x\| < 1$

Tabelle 14.1: Tabelle von Grundintegralen

15 Die Taylorsche Entwicklung

15.1 Definition. Sei I ein offenes Intervall, $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $n \in \mathbb{N}$. Man sagt, f sei n-*mal stetig differenzierbar* oder *von der Klasse* C^n, wenn f n-mal differenzierbar und $f^{(n)}$ stetig ist. Wenn f stetig ist, sagt man, f sei von der Klasse C^0. Wenn f beliebig oft differenzierbar ist, sagt man, f sei von der Klasse C^∞. Man schreibt dann $f \in C^n(I)$ bzw. $f \in C^\infty(I)$.

15.2 Satz (Taylor-Formel). *Sei I ein offenes Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ von der Klasse C^{n+1} für ein $n \in \mathbb{N}_0$. Sind $a, x \in I$, so gilt*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_{n+1}(x),$$

wobei

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Bezeichnung. Die Polynome $\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ sind die *Taylor-Polynome* von f.

15.3 Korollar (Restgliedformel von Cauchy). *Unter den Voraussetzungen von Satz 15.2 existiert ein ξ zwischen a und x, so dass*

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-a)(x-\xi)^n.$$

15.4 Korollar (Restgliedformel von Lagrange). *Unter den Voraussetzungen von Satz 15.2 existiert ein ξ zwischen a und x, so dass*

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

15.5 Beispiel. $f = \exp$, $a = 0$. Dann $f^{(n)}(a) = 1$ für alle n. Also

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_{n+1}(x),$$

wobei

(a) (Cauchy-Restglied)

$$R_{n+1}(x) = \frac{\exp(\xi)}{n!}x(x-\xi)^n$$

für ein ξ zwischen 0 und x.

(b) (Lagrange-Restglied)

$$R_{n+1}(x) = \frac{\exp(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

für ein (anderes) ξ zwischen 0 und x.

15.6 Beispiel. Bestimme

$$\lim_{x\to\pi/2} \frac{\sin(4x) - 4x + 2\pi}{(2x-\pi)^3}.$$

Liste der benötigten Ableitungen

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sin(4x) - 4x + 2\pi, & f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 0, & g(x) &= (2x-\pi)^3, & g\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 0,\\
f'(x) &= 4\cos(4x) - 4, & f'\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 0, & g'(x) &= 6(2x-\pi)^2, & g'\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 0,\\
f''(x) &= -16\sin(4x), & f''\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 0, & g''(x) &= 24(2x-\pi), & g''\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 0,\\
f'''(x) &= -64\cos(4x), & f'''\left(\frac{\pi}{2}\right) &= -64, & g'''(x) &= 48, & g'''\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 48.
\end{aligned}$$

Also

$$\frac{\sin(4x) - 4x + 2\pi}{(2x-\pi)^3} = \frac{R_{f,3}(x)}{R_{g,3}(x)} = \frac{\frac{f'''(\xi_f)}{3!}(x-\pi/2)^3}{\frac{g'''(\xi_g)}{3!}(x-\pi/2)^3} = \frac{f'''(\xi_f)}{g'''(\xi_g)} \to -\frac{4}{3}.$$

16 Uneigentliche Integrale

16.1 Definition. (a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f\colon]a, b] \to \mathbb{R}$ für jedes $t \in]a, b[$ auf $[t, b]$ Riemann-integrierbar. Wenn $\lim_{t \searrow a} \int_t^b f(x)dx$ in $\mathbb{R}$ existiert, so schreibt man $\int_a^b f(x)dx$ für den Grenzwert und sagt, dass das *uneigentliche Integral* $\int_a^b f(x)dx$ konvergiert.

(b) Die Funktion $f\colon]-\infty, b] \to \mathbb{R}$ sei für alle $t < b$ auf $[t, b]$ Riemann-integrierbar. Falls $\lim_{t \to -\infty} \int_t^b f(x)dx$ existiert, so schreibt man $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ für den Grenzwert und sagt, dass das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ konvergiert.

(c) In den Fällen (a) und (b) sagt man, das Integral sei uneigentlich im linken Endpunkt. Analog behandelt man Integrale, die uneigentlich im rechten Endpunkt sind.

(d) Ist das Integral uneigentlich in beiden Endpunkten, so wählt man ein c zwischen den Endpunkten und definiert

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

vorausgesetzt, beide Integrale existieren.

16.2 Beispiel. (a)

$$\int_0^\infty e^{-x}dx = 1.$$

(b) Für $c \geq 1$ divergiert das uneigentliche Integral $\int_0^1 \frac{dx}{x^c}$ und für $c < 1$ konvergiert es. In diesem Fall gilt

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^c} = \frac{1}{1-c} \quad \text{falls } c < 1.$$

16.3 Satz (Cauchy-Kriterium). *Sei* $f\colon [a, \infty[\to \mathbb{R}$ *für jedes* $t > a$ *auf* $[a, t]$ *Riemann-integrierbar. Genau dann konvergiert* $\int_a^\infty f(x)dx$, *wenn es zu jedem* $\epsilon > 0$ *ein* $M > a$ *gibt, so dass*

$$\left| \int_s^t f(x)dx \right| < \epsilon \quad \textit{für alle } s, t \geq M.$$

Die Analoga für die anderen uneigentlichen Integrale gelten ebenfalls.

16.4 Beispiel. $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ konvergiert.

Mit dem Residuensatz aus der Funkctionentheorie lässt sich zeigen, dass $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$.

16.5 Definition. Sei $\int_a^b f(x)dx$ ein uneigentliches Integral. Man sagt, dass es *absolut konvergiert,* wenn $\int_a^b |f(x)|dx$ konvergiert.

16.6 Satz. *Sei $\int_a^b f(x)dx$ ein uneigentliches Integral. Wenn es absolut konvergiert, dann konvergiert es.*

16.7 Beispiel. Das Integral $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ konvergiert nicht absolut.

16.8 Satz (Majorantenkriterium). *Die Funktionen $f, g\colon [a, \infty[\to \mathbb{R}$ seien für jedes $b > a$ auf $[a, b]$ Riemann-integrierbar, und es gelte $|g(x)| \leq f(x)$ für alle $x \geq a$. Wenn $\int_a^\infty f(x)dx$ konvergiert, dann konvergiert $\int_a^\infty g(x)dx$ absolut.*

Die Analoga für die anderen uneigentlichen Integrale gelten ebenfalls.

16.9 Beispiel. Das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^\infty \exp(-x^2)dx$ konvergiert absolut.

Wir werden in der Analysis III sehen, dass $\int_{-\infty}^\infty \exp(-x^2)dx = \sqrt{\pi}$.

16.10 Satz (Integralkriterium für Reihen). *Es sei $f\colon [1, \infty[\to \mathbb{R}$ eine monoton fallenden Funktion mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \geq 1$. Dann sind äquivalent:*

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty f(n)$ *konvergiert.*

(b) $\displaystyle\int_1^\infty f(x)dx$ *konvergiert.*

16.11 Bemerkung. (a) Einen Zusammenhang zwischen den Werten von $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ und $\int_1^\infty f(x)dx$ liefert die Euler-Maclaurinsche Formel.

(b) $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}$ konvergiert genau für $s > 1$.

16.12 Beispiel. Für jedes $x > 0$ konvergiert das uneigentliche Integral

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt =: \Gamma(x)$$

absolut. Diese Funktion ist die *Gammafunktion.*

16.13 Satz. *Für $x > 0$ gilt $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$.*

16.14 Korollar. *Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $\Gamma(n) = (n - 1)!$.*

Den Graph der Gamma-Funktion zeigt Abbildung 16.1.

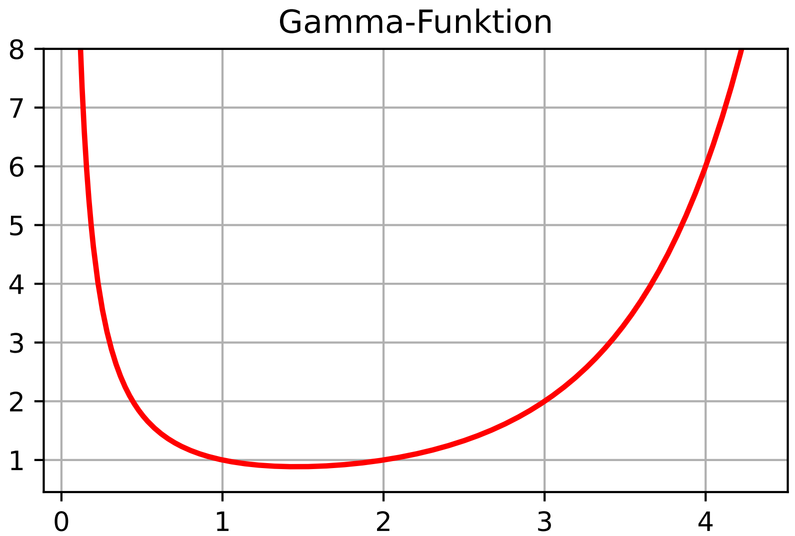

Abbildung 16.1: Graph der Gamma-Funktion

17 Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen

17.1 Definition. Es sei D Menge. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei eine Funktion $f_n \colon D \to \mathbb{R}$ gegeben. Ist $f \colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ für alle $x \in D$, so sagt man, dass die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *punktweise* gegen f konvergiert.

17.2 Definition. Es sei D eine Menge und es seien $f_n \colon D \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, und $f \colon D \to \mathbb{R}$ Funktionen. Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert *gleichmäßig* gegen f, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $x \in D$ und alle $n \geq N$ gilt, dass $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.

Diese beiden Definitionen gelten genauso, wenn man $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{C}$ ersetzt.

17.3 Beispiel. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$. Dann konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise. Obwohl alle f_n stetig sind, ist die Grenzfunktion unstetig.

17.4 Satz. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gleichmäßig konvergente Folge stetiger Funktionen $f_n \colon D \to \mathbb{R}$. Dann ist die Grenzfunktion stetig.*

Gilt auch für komplexes D und/oder komplexe Zielmenge.

17.5 Satz. *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere gleichmäßig gegen f. Dann*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Bemerkung. Eine Aufgabe von Blatt 13 zeigt, dass die Aussage von Satz 17.5 nicht mehr gilt, wenn gleichmäßige Konvergenz durch punktweise Konvergenz ersetzt wird.

17.6 Satz. *Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n \colon]a,b[\to \mathbb{R}$ differenzierbar und $f_n' \colon]a,b[\to \mathbb{R}$ sei stetig. Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere punktweise gegen die Funktion $f \colon]a,b[\to \mathbb{R}$ und die Folge $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ sei gleichmäßig konvergent. Dann ist f differenzierbar und*

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) \quad \textit{für alle } x \in]a,b[.$$

17.7 Beispiel. Definiere $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{n}\sin(nx)$. Dann konvergiert die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen die Nullfunktion. Es gilt $f_n'(x) = \cos(nx)$. Diese Folge konvergiert noch nicht einmal punktweise, wie man durch Einsetzen von $x = \pi$ sieht.

17.8 Definition. Sei D eine Menge. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ sei f_k eine in D definierte Funktion. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ die Partialsumme. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ heißt gleichmäßig konvergent, wenn die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergiert.

17.9 Korollar. *Eine gleichmäßig konvergente Reihe stetiger Funktionen hat eine stetige Summe.*

17.10 Satz (Weierstraßscher Konvergenzsatz). *Sei D eine Menge. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ sei $f_k \colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gebe es ein $a_k \geq 0$, so dass $|f_k(x)| \leq a_k$ für alle $x \in D$. Falls $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert, so ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ gleichmäßig konvergent.*

Diese Aussage gilt auch, wenn man $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{C}$ ersetzt.

17.11 Beispiel. (a) Für $0 < R < 1$ konvergiert $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$ gleichmäßig auf $[-R, R]$.

(b) Für $-1 < x \leq 1$ gilt

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}.$$

Beweis. Für $f(x) = \log(1+x)$ und $k \in \mathbb{N}$ zeigt man mit vollständiger Induktion

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1}(k-1)!(1+x)^{-k}.$$

Also $f^{(k)}(0) = (-1)^k(k-1)!$ für $k \in \mathbb{N}$. Daher impliziert Satz 15.2 über die Taylorsche Entwicklung

$$\log(1+x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + R_{n+1}(x).$$

Im Fall $0 < x \leq 1$ kann das Restglied von Lagrange benutzt werden. Es gibt ξ mit

$$R_{n+1}(x) = \frac{(-1)^n (1+\xi)^{-n-1}}{n+1} x^{n+1}$$

Wegen $0 < \xi < x < 1$ strebt das Restglied für $n \to \infty$ gegen 0.

Im Fall $-1 < x < 0$ kommt man nur mit der Integralformel weiter

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt = (-1)^n \int_0^x \left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n \frac{dt}{1+t}.$$

Für $g(t) = \frac{x-t}{1+t}$ gilt $g'(t) = -\frac{1+x}{(1+t)^2}$. Also ist g monoton fallend. Wegen $g(x) = 0$ nimmt $|g|$ sein Maximum in $t = 0$ an, also $|g(t)| \leq |g(0)| = |x|$. Damit können wir das Restglied abschätzen

$$|R_{n+1(x)}| \leq \int_x^0 \frac{|x|^n}{1+t}\, dt = -|x|^n \log(1+x) \to 0, \quad n \to \infty.$$

□

Insbesondere haben wir gezeigt, dass $\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

17.12 Bezeichnung. Sei D eine Menge. Eine Folge von Funktionen $f\colon D \to \mathbb{R}$ erfüllt das *Cauchy-Kriterium* für gleichmäßige Konvergenz, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n, m \geq N$ und alle $x \in D$ gilt

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon.$$

17.13 Satz. *Es sei D eine Menge. Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erfülle das Cauchy-Kriterium. Dann konvergiert sie gleichmäßig.*

17.14 Theorem. *Sei I ein offenes Intervall und sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $C^\infty(I)$ derart, dass alle Ableitungen $f^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}_0$, das Cauchy-Kriterium erfüllen. Dann konvergiert die Folge gleichmäßig gegen ein $f \in C^\infty(I)$. Ferner konvergiert für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Folge $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $f^{(k)}$.*

17.15 Beispiel. Für $\nu \geq 0$ wird durch

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!\Gamma(\nu + j + 1)} \left(-\frac{x^2}{4}\right)^j, \quad x > 0,$$

eine Funktion in $C^\infty(]0, \infty[)$ definiert. Es handelt sich um die *Bessel-Funktion* der Ordnung ν.

Wegen Theorem 17.14 kann die Reihe gliedweise differenziert werden. Aus der Funktionalgleichung der Gammafunktion folgt daher, dass J_ν die folgende Differentialgleichung erfüllt

$$x^2 J_\nu''(x) + x J_\nu'(x) + (x^2 - \nu^2) J_\nu(x) = 0.$$

18 Potenzreihen

18.1 Definition. Unter einer *komplexen Potenzreihe* verstehen wir eine Funktion der Form

$$z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

wobei $a, c_0, c_1, \ldots$ feste komplexe Zahlen sind. Der Definitionsbereich dieser Funktion ist die Menge aller komplexen z, für die die Reihe konvergiert.

18.2 Beispiel. Die Exponentialfunktion und die trigonometrischen Funktionen sind durch Potenzreihen gegeben. Für $\nu > 0$ ist $\left(\frac{2}{x}\right)^{\nu} J_\nu(x)$ eine Potenzreihe.

18.3 Definition. Für $a \in \mathbb{C}$ und $r \geq 0$ sei

$$B_r(a) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < r\} \quad \text{und} \quad \overline{B}_r(a) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| \leq r\}.$$

Ferner sei $B_\infty(a) = \mathbb{C}$ und $\overline{B}_\infty(a) = \mathbb{C}$.

18.4 Satz. *Sei $a \in \mathbb{C}$ und sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Sei $w \in \mathbb{C}$ so, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(w-a)^n$ konvergiert. Ist $0 \leq \rho < |w-a|$, so konvergiert die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ absolut und gleichmäßig auf $\overline{B}_\rho(a)$.*

18.5 Definition. Sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ eine Potenzreihe. Dann definiert man ihren *Konvergenzradius* als

$$r = \sup\left\{|z-a| \;\middle|\; \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \text{ ist konvergent}\right\}.$$

Dabei sind $r = 0$ und $r = \infty$ zugelassen. Wegen des Satzes 18.4 ist $r = \infty$ gleichbedeutend damit, dass die Potenzreihe auf ganz $\mathbb{C}$ konvergiert.

Beispiel. Die in Beispiel 18.2 genannten Potenzreihen haben alle den Konvergenzradius ∞. Die geometrische Reihe hat den Konvergenzradius 1.

18.6 Satz. *Sei r der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$. Dann gelten:*

(a) Die Potenzreihe konvergiert absolut auf $B_r(a)$.

(b) Ist $0 < \rho < r$, so konvergiert sie gleichmäßig auf $\overline{B}_\rho(a)$.

(c) *Für jedes* $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{B}_r(a)$ *divergiert die Potenzreihe.*

18.7 Beispiel. Bestimme den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{\sqrt{n}} z^n$.

Für festes z verwenden wir das Quotientenkriterium

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{\sqrt{n+1}} z^{n+1}}{2^{\sqrt{n}} z^n} = 2^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} z.$$

Für $|z| > 1$ ist also $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$ und die Reihe divergiert. Wegen des Mittelwertsatzes existiert $n < \nu < n+1$, so dass

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{2\sqrt{\nu}} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Daher konvergiert $2^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} z$ gegen z und für $|z| < 1$ konvergiert die Reihe. Der Konvergenzradius beträgt folglich 1.

18.8 Korollar. *Sei* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* r. *Sie definiert auf* $B_r(a)$ *eine stetige Funktion.*

18.9 Definition. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine nach oben beschränkte, reelle Folge. Für $N \in \mathbb{N}$ setze $b_N = \sup\{a_n \mid n \geq N\}$. Die Folge $(b_N)_{N \in \mathbb{N}}$ ist monoton fallend und beschränkt, besitzt also einen Grenzwert ℓ. Man bezeichnet ℓ als den *Limes superior* von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, i. Z.

$$\limsup_{n \to \infty} a_n = \lim_{N \to \infty} \sup_{n \geq N} a_n.$$

Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nach unten beschränkt, so bezeichnet man

$$\liminf_{n \to \infty} a_n = \lim_{N \to \infty} \inf_{n \geq N} a_n$$

als ihren *Limes inferior*. Der Limes superior einer nach oben unbeschränkten Folge ist ∞, der Limes inferior einer nach unten unbeschränkten Folge ist $-\infty$.

18.10 Beispiel. $\liminf_{n \to \infty} (-1)^n + \frac{1}{n} = -1$ und $\limsup_{n \to \infty} (-1)^n + \frac{1}{n} = 1$.

Es gelten nämlich

$$\sup_{n \geq N} (-1)^n + \frac{1}{n} = \begin{cases} 1 + \frac{1}{N}, & N \text{ gerade}, \\ 1 + \frac{1}{N+1}, & N \text{ ungerade}, \end{cases} \qquad \inf_{n \geq N} (-1)^n + \frac{1}{n} = -1.$$

18.11 Bemerkung. (a) Wenn $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert, dann stimmen $\lim_{n \to \infty} a_n$, $\limsup_{n \to \infty} a_n$ und $\liminf_{n \to \infty} a_n$ überein.

(b) Wenn $\mathbb{N}$ in endlich viele Teilfolgen $(n_k^{(1)})_{k \in \mathbb{N}}$, $(n_k^{(2)})_{k \in \mathbb{N}}$, $\ldots$ $(n_k^{(\ell)})_{k \in \mathbb{N}}$, zerlegt werden kann (also jedes n in genau einer der Teilfolgen) und $\lim_{k \to \infty} a_{n_k^j} = A_j$, dann $\limsup_{n \to \infty} a_n = \max_{j=1,\ldots,\ell} A_j$ und $\liminf_{n \to \infty} a_n = \min_{j=1,\ldots,\ell} A_j$.

18.12 Theorem (Hadamard). *Sei* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* r*. Dann*

$$\frac{1}{r} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}.$$

18.13 Beispiel. (a) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}(z-a)^n$ hat den Konvergenzradius 1, denn $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^{\alpha}} = 1$.

(b) Die Exponenentialreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ hat bekanntlich den Konvergenzradius ∞. Also $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$. Das folgt ebenfalls aus Aufgabe 4 von Blatt 4.

(c) Betrachte

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} z^{4n}.$$

Dann

$$\frac{1}{r} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[4n]{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}+\frac{1}{4n}} = \sqrt[4]{\frac{1}{2}}.$$

Der Konvergenzradius beträgt $\sqrt[4]{2}$.

18.14 Definition. Eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ heißt *reell,* wenn a sowie alle c_n reell sind.

18.15 Satz. *Sei* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ *eine reelle Potenzreihe mit Konvergenzradius* $r > 0$*.*

(a) Auf $]a-r, a+r[$ *ist die Funktion* f *beliebig oft differenzierbar und es gilt*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-a)^{n-1} \quad \textit{falls } a-r < x < a+r.$$

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ *gilt*

$$c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a).$$

18.16 Definition. Sei I ein offenes Intervall, sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Sie heißt *reell-analytisch,* wenn es zu jedem $a \in I$ ein $r > 0$ und $c_0, c_1, \dots \in \mathbb{R}$ gibt mit $]a-r, a+r[\subseteq I$ und

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n \quad \text{für alle } x \in]a-r, a+r[.$$

In diesem Fall bezeichnet man die Reihe als *Taylorreihe* von f im Punkt a.

18.17 Bemerkung. Jede reell-analytische Funktion ist von der Klasse C^∞. Es gibt aber Funktionen von der Klasse C^∞, die nicht reell-analytisch sind. Ein Beispiel ist

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x}\right), & \text{für } x > 0, \\ 0, & \text{für } x \leq 0. \end{cases}$$

Beweis. Es wird gezeigt: Die angegebene Funktion f ist nicht Null, aber alle ihre Taylorpolynome sind Null.

□

18.18 Beispiel. Für $x \in \,]-1, 1[$ gilt

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx}\frac{1}{1-x} = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n.$$

Dieses Ergebnis hatten wir in Aufgabe 2 von Blatt 6 aus dem Cauchy-Produkt hergeleitet.

18.19 Beispiel. Für $f(x) = \log \frac{1+x}{1-x}$ gilt

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\log(1+x) - \frac{d}{dx}\log(1-x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} = \frac{2}{1-x^2} = 2\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}.$$

Wegen $f(0) = 0$ folgt mit Satz 18.15

$$f(x) = \int_0^x f'(t)\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} x^{2n+1}.$$

Speziell

$$\log 2 = f\left(\frac{1}{3}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1}.$$

Diese Reihe konvergiert viel schneller als die aus Beispiel 17.11.

18.20 Beispiel. (a) Für $-1 < x < 1$ gilt

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

(b) Wegen $\tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ folgt

$$\pi = 2\sqrt{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{3}\right)^n \frac{1}{2n+1}.$$

(c) Bekannter ist allerdings die Leibnizsche Reihe

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}.$$

19 Wallissches Produkt

19.1 Satz. *Für* $m \in \mathbb{N}_0$ *setzen wir*

$$A_m := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)^m dx.$$

Dann $A_0 = \frac{\pi}{2}$, $A_1 = 1$, *und für* $n \in \mathbb{N}$ *gelten*

$$A_{2n} = \frac{\pi}{2} \prod_{j=1}^{n} \frac{2j-1}{2j}$$

$$A_{2n+1} = \prod_{j=1}^{n} \frac{2j}{2j+1}.$$

19.2 Satz (Wallissches Produkt).

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2-1} = \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} \frac{4n^2}{4n^2-1}.$$

20 Stirlingsche Formel

20.1 Theorem (Stirlingsche Formel). *Für jedes* $n \in \mathbb{N}$ *gilt*

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \exp\left(\frac{1}{12n}\right).$$

Der Beweis ist Kaballo [Kab00] entnommen. Er zerfällt in mehrere Lemmata.

20.2 Lemma. *Für* $\mu \in \mathbb{N}$ *gilt*

$$1 < \left(\mu + \frac{1}{2}\right) \log \frac{\mu+1}{\mu} < 1 + \frac{1}{12}\left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu+1}\right). \tag{20.1}$$

20.3 Bezeichnung. Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-(n-1)}} = n! \left(\frac{e}{n}\right)^n \frac{1}{e\sqrt{n}}, \\ b_n &= \log a_n = \log n! + (n-1) - \left(n + \frac{1}{2}\right) \log n. \end{aligned}$$

20.4 Lemma. *Der Grenzwert* $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ *existiert. Für alle* n *gilt*

$$0 \leq b_n - b \leq \frac{1}{12n}.$$

21 Fourierreihen

21.1 Definition. Eine endliche Summe der Form

$$\sum_{n=-N_1}^{N_2} c_n e^{inx}, \quad x \in \mathbb{R},$$

ist ein *trigonometrisches Polynom.*

21.2 Lemma (Orthogonalitätsrelation). *Für* $n, m \in \mathbb{Z}$ *gilt*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\overline{e^{imx}}\, dx = \begin{cases} 1, & n = m, \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

21.3 Bemerkung. Für ein trigonometrisches Polynom $f(x) = \sum_{n=-N_1}^{N_2} c_n e^{inx}$ gilt also

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\, dx.$$

21.4 Definition. Für eine Riemann-integrierbare Funktion $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{Z}$ definieren wir den n-ten Fourierkoeffizienten durch

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\, dx.$$

Die Reihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{inx}$ ist die *Fourierreihe* von f.

Die Konvergenz der Fourierreihe ist ein schwieriges Thema:

21.5 Beispiel (Du Bois-Reymond (1873), Körner [Kör88], Kapitel 18). Es gibt eine 2π-periodische, stetige Funktion, der Fourierreihe in 0 divergiert.

21.6 Bemerkung. Die Reihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n$ konvergiere absolut. Dann konvergiert die Fourierreihe $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ gleichmäßig. Wenn außerdem $f(x) \in \mathbb{R}$ für alle x, dann gilt für $n \in \mathbb{N}$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\, dx = \overline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}\, dx} = \overline{c_{-n}}.$$

Wenn wir schreiben $c_n = a_n + ib_n$ mit $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, dann

$$f(x) = \operatorname{Re} f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cos(nx) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \sin(nx).$$

Für abstrakte Untersuchungen ist die Schreibweise mit der komplexen Exponentialfunktion aber vorzuziehen.

21.7 Bezeichnung. Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $s \in \mathbb{R}$ definieren wir den Dirichlet-Kern

$$D_n(s) = \begin{cases} \dfrac{\sin\big((2n+1)\frac{s}{2}\big)}{\sin\frac{s}{2}}, & s \notin 2\pi Z, \\ 2n+1, & s \in 2\pi\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ferner definieren wir für $n \in \mathbb{N}$ den Fejér-Kern

$$F_n(s) = \begin{cases} \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{\sin\frac{ns}{2}}{\sin\frac{s}{2}}\right)^2, & s \notin 2\pi\mathbb{Z}, \\ n, & s \in 2\pi\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Aus der Regel von de l'Hôpital folgt die Stetigkeit beider Kerne.

21.8 Lemma. *Für* $n \in \mathbb{N}$ *und eine Riemann-integrierbare Funktion* $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ *sei*

$$s_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)e^{ikx}.$$

Dann gilt

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x-t)f(t)\, dt.$$

21.9 Bemerkung. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *Cesàro-konvergent,* wenn die Folge ihrer Mittelwerte $\big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\big)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Die durch $a_n = (-1)^n$ gegebene Folge zeigt, dass die Umkehrung nicht gilt.

Für eine gegen a konvergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hatten wir in Aufgabe 4 von Blatt 5 gezeigt, dass sie Cesàro-konvergiert und dass der Grenzwert der Mittelwerte gleich a ist.

Für eine Riemann-integrierbare Funktion f werden wir zeigen, dass die Folge $(s_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ Cesàro-konvergiert. Dazu klären wir zuerst die Rolle des Fejér-Kerns.

21.10 Satz. *Für*

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} s_k(x)$$

gilt

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(x-t)f(t)\, dt.$$

21.11 Definition. Sei J ein kompaktes Intervall. Eine Funktion $f\colon J \to \mathbb{R}$ ist eine *Regelfunktion*, wenn sie gleichmäßiger Limes von Treppenfunktionen ist.

21.12 Satz. *Eine beschränkte Funktion* $f\colon J \to \mathbb{R}$ *ist genau dann eine Regelfunktion, wenn für alle* $c \in J$ *die Grenzwerte*

$$f(c^+) = \lim_{t\searrow c} f(t) \quad \text{und} \quad f(c^-) = \lim_{t\nearrow c} f(t)$$

existieren, soweit sie sinnvoll sind (am Rand also nur einer).

Insbesondere sind stetige Funktionen Regelfunktionen.

Beweis. Kaballo [Kab00], Satz 18.10. □

21.13 Definition. Für $f\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ definiert man $\widetilde{f}$ als die 2π-periodische Fortsetzung der Einschränkung von f auf $]-\pi,\pi]$.

Sei $f\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion. Dann ist auch $\widetilde{f}$ eine Regelfunktion und wir definieren f^* durch

$$f^*(x) = \frac{1}{2}\left(\widetilde{f}(x^+) + \widetilde{f}(x^-)\right).$$

21.14 Beispiel. Sei $g(x) = x$ für $x \in [-\pi,\pi]$ die *Sägezahnfunktion.* Dann gilt $\widetilde{g}(-\pi) = \widetilde{g}(\pi) = \pi$, aber $g^*(-\pi) = g^*(\pi) = 0$.

21.15 Theorem (Satz von Fejér (1900)). *Für Regelfunktion* $f\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ *gilt* $\lim_{n\to\infty} \sigma_n(x) = f^*(x)$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$.

Beweis. Kaballo [Kab00], Theorem 40.7. □

21.16 Korollar. *Sei* $f\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ *eine Regelfunktion. Falls ihre Fouriereihe an einer Stelle* x *konvergiert, so konvergiert sie gegen* $f^*(x)$.

21.17 Beispiel. Sei $h(x) = \frac{\pi}{2} - |x|$ für $x \in [-\pi,\pi]$. Dann ist $\widetilde{h}$ stetig und $\widetilde{h} = h^*$. Wir berechnen die Fourierkoeffizienten.

$$\begin{aligned}
\hat{h}(k) &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)e^{-ikx}\,dx + \int_{0}^{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)e^{-ikx}\,dx\right)\\
&= \frac{1}{2\pi}\left(-\int_{\pi}^{0}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)e^{ikx}\,dx + \int_{0}^{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)e^{-ikx}\,dx\right)\\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos(kx)\,dx.
\end{aligned}$$

Also $\hat{h}(0) = 0$. Für $k \neq 0$ ergibt partielle Integration

$$\hat{h}(k) = \frac{2}{\pi}\left(\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\frac{\sin(kx)}{k} - \frac{\cos(kx)}{k^2}\right)\Bigg|_0^{\pi}$$

Für gerades $k \neq 0$ verschwindet $\hat{h}(k)$, für ungerades k ist es gleich $\frac{4}{\pi}$. Die Fourierreihe von h ist also gleich $\frac{4}{\pi}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\cos((2j+1)x)}{(2j+1)^2}$. Nach dem Majorantenkriterium konvergiert sie sogar gleichmäßig. Aus dem Korollar folgt also für $-\pi < 0 < \pi$

$$h(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\cos((2j+1)x)}{(2j+1)^2}.$$

Setzt man $x = 0$ ein, erhält man

$$\frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(2j+1)^2}.$$

Damit erhalten wir die Lösung des Basler Problems:

21.18 Theorem (Euler (1735)).

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Literatur

[For13] Otto Forster. *Analysis 2. Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$, gewöhnliche Differentialgleichungen.* German. 10th revised ed. Grundkurs Math. Heidelberg: Springer Spektrum, 2013. ISBN: 978-3-658-02356-0; 978-3-658-02357-7. DOI: 10.1007/978-3-658-02357-7.

[For16] Otto Forster. *Analysis 1. Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen.* German. 12th edition. Grundkurs Math. Heidelberg: Springer Spektrum, 2016. ISBN: 978-3-658-11544-9; 978-3-658-11545-6. DOI: 10.1007/978-3-658-11545-6.

[Kab00] Winfried Kaballo. *Einführung in die Analysis I.* German. 2. Aufl. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 2000. ISBN: 3-8274-1033-9.

[Kab97] Winfried Kaballo. *Einführung in die Analysis II.* German. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 1997. ISBN: 3-8274-0198-4.

[Kör88] T. W. Körner. *Fourier analysis.* Cambridge University Press, Cambridge, 1988, S. xii+591. ISBN: 0-521-25120-6. DOI: 10.1017/CBO9781107049949. URL: https://doi.org/10.1017/CBO9781107049949.

[MK57] H. von Mangoldt und Konrad Knopp. *Einführung in die höhere Mathematik. 3. Band: Integralrechnung und ihre Anwendungen. Funktionentheorie. Differentialgleichungen. 10. vollständig neubearb. Aufl.* German. Leipzig: S. Hirzel Verlag. xv, 640 S., 107 Fig. im Text (1957). 1957.

[SS18] Hermann Schichl und Roland Steinbauer. *Einführung in das mathematische Arbeiten.* German. 3rd edition. Heidelberg: Springer Spektrum, 2018. ISBN: 978-3-662-56805-7. DOI: 10.1007/978-3-662-56806-4.