Analysis II

Rüdiger W. Braun

Wintersemester 2025/26

Inhaltsverzeichnis

Teil I.

Differentialrechnung mehrerer Veränderlicher

1. Normierte Räume

1.1 Definition. Ein (reeller) *normierter Raum* besteht aus einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V und einer Abbildung $V \to \mathbb{R}$, $v \mapsto \|v\|$, welche man als *Norm* bezeichnet, so dass gilt

(a) $\|v\| \geq 0$ für alle $v \in V$,

(b) $\|v\| = 0$ dann und nur dann, wenn $v = 0$,

(c) $\|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und $v \in V$,

(d) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ für alle $v, w \in V$ (Dreiecksungleichung).

1.2 Lemma (Umgekehrte Dreiecksungleichung). *Für $v, w \in V$ gilt $\|v - w\| \geq |\|v\| - \|w\||$.*

1.3 Definition. Sei $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Die *euklidische Norm* von x ist definiert als

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Jetzt würde man gerne beweisen, dass die euklidische Norm ihren Namen zu Recht trägt. Dazu benötigen wir zuerst eine Schreibweise und eine Ungleichung.

1.4 Definition. Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ definieren wird das Skalarprodukt durch

$$x \cdot y := \sum_{j=1}^{n} x_j y_j.$$

1.5 Satz (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung). *Sind $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ und $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ im $\mathbb{R}^n$, so gilt $|x \cdot y| \leq \|x\|_2 \|y\|_2$.*

1.6 Satz. *Die euklidische Norm ist in der Tat eine Norm.*

1.7 Definition. Für $x \in \mathbb{R}^n$ und $p \geq 1$ definieren wir

$$\|x\|_p := \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p \right)^{1/p}.$$

Außerdem

$$\|x\|_\infty := \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$$

1.8 Lemma. *Für* $a, b > 0$ *und* $p, q \geq 1$ *mit* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *gilt*

$$a^{1/p} b^{1/q} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}.$$

1.9 Satz (Höldersche Ungleichung). *Für* $x, y \in \mathbb{R}^n$ *und* $p, q \in \,]1, \infty[$ *mit* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *gilt*

$$|x \cdot y| \leq \|x\|_p \|y\|_q.$$

1.10 Satz (Minkowskische Ungleichung). *Seien* $x, y \in \mathbb{R}^n$ *und sei* $1 \leq p \leq \infty$. *Dann gilt*

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

1.11 Korollar. *Für* $1 \leq p \leq \infty$ *ist* $\|\cdot\|_p$ *eine Norm.*

1.12 Definition. Zwei Normen $\|\cdot\|$ und $|||\cdot|||$ auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V heißen *äquivalent*, wenn es $a, b > 0$ gibt, so dass

$$a\|v\| \leq |||v||| \leq b\|v\| \quad \text{für alle } v \in V.$$

1.13 Satz. *Auf dem* $\mathbb{R}^n$ *sind alle* p-*Normen mit* $1 \leq p \leq \infty$ *äquivalent.*

Wir werden später den Satz beweisen, dass je zwei Normen auf dem $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind.