Aufg.

1. Richtig oder falsch? 10 P.

2. konjugierte harmonische Funktion 4 P.

3. Integrale (1) 8 P.

4. Laurentreihen! 11 P.

5. ~~Residuen~~ → ~~oder was zum~~ Liouville, ~~oder zum Identitätssatz~~ 5

~~6.~~ 5. Zum Max-Prinzip ~~10~~ P. (oder 8.)

~~7.~~ 6. Integrale (2) 8 P.

~~8.~~ 7. Biholomorphe Abbn. 6 P. 60 P.

Bestanden ab: 26 P.

Aufg. 1 (Richtig oder falsch?) |10 P.| (1)

Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f : \Omega \to f(\Omega) \subset \mathbb{C}$ biholomorph. Welche der nachstehenden Eigenschaften einer Teilmenge $M \subset \Omega$ werden auf $f(M)$ vererbt? Bitte auf dem Blatt ankreuzen!

(a) Abgeschlossenheit, r

(b) Beschränktheit, f

(c) Sternförmigkeit, f

(d) Wegzusammenhang, r

(e) einfacher Wegzusammenhang. r

Bsp.: zu (b) Die inverse Cayley-Transformation bildet $B_1(0)$ biholomorph auf die obere Halbebene ab.

Zu (c) $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ bildet das offene Rechteck

sternförmig $\to R = \{x+iy \in \mathbb{C} : 0 < x < 1,\ 0 < y < 2\pi\}$

biholomorph auf das Kreisringsegment

$$\exp(R) = \{r \cdot e^{iy} \in \mathbb{C} : 1 < r < e,\ 0 < y < 2\pi\}$$

ab. $\leftarrow$ nicht sternförmig.

~~Klausur~~ Aufgabe 2: Unter welcher Voraussetzung an die Koeffizienten $a, b, c \in \mathbb{R}$ ist das quadratische Polynom

$$q(x+iy) = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

der Realteil einer ganzen Funktion $Q = q + ir : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$?

Bestimmen ~~Ermitteln~~ Sie r (unter dieser Voraussetzung). $\boxed{1+3\text{ P.}}$

Lös.: Notwendig und hinreichend ist

$$0 = \Delta q(x+iy) = 2(a+c), \text{ also } c = -a \qquad 1\text{P.}$$

$$\left(\text{so dass } q(x+iy) = a(x^2-y^2) + b\,2xy\right)$$

Jetzt kann man r mit Hilfe der Cauchy-Riemann-Dgln. aus q bestimmen

$$\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{\partial q}{\partial y} = +2ay - 2bx \Rightarrow r(x+iy) = -bx^2 + 2axy + c(y) \qquad 1\text{P.}$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} = 2ax + 2by \Rightarrow r(x+iy) = 2axy + by^2 + c(x) \qquad 1\text{P.}$$

$$r(x+iy) = 2axy + b(y^2-x^2) + \underset{1\text{P.}}{C} \quad \left(\begin{matrix}\text{absolute reelle}\\ \text{Konstante}\end{matrix}\right)$$

Alt. Ansatz $Q(x+iy) = (\lambda + i\mu)z^2 = (\lambda + i\mu)(x^2-y^2+2ixy)$

$$= \lambda(x^2-y^2) - 2\mu xy + i(\mu(x^2-y^2) + 2\lambda xy)$$

Vergleich mit q zeigt: $\lambda = a$ und $\mu = -b$, also

$$r(x+iy) = b(y^2-x^2) + 2axy$$

(Auch wenn durch den Ansatz die Konstante verloren geht, gibt hierfür auch 3 P.)

Berechnen Sie die folgenden Integrale

(a) $I_1 := \displaystyle\int_{\partial B_1^+(0)} \frac{d\xi}{(\xi-2)(\xi+2)^2}$ (b) $I_2 := \displaystyle\int_{\partial B_1^+(2)} \frac{d\xi}{(\xi-2)(\xi+2)^2}$

(c) $I_3 := \displaystyle\int_{\partial B_1^+(-2)} \frac{d\xi}{(\xi-2)(\xi+2)^2}$ (d) $I_4 := \displaystyle\int_{\partial B_3^+(0)} \frac{d\xi}{(\xi-2)(\xi+2)^2}$

Aufg. 3
$4 \times 2 = 8$ P.

Lös.:

Am einfachsten wohl mit dem Residuensatz.

Für $f(\xi) = \dfrac{1}{(\xi-2)(\xi+2)^2}$ haben wir

$$\mathrm{Res}_2(f) = \lim_{\xi \to 2} \frac{1}{(\xi+2)^2} = \frac{1}{16}$$

und

$$\mathrm{Res}_{-2}(f) = \lim_{\xi \to -2} \frac{d}{d\xi} \frac{1}{\xi-2} = -\frac{1}{16}$$

Damit ergibt sich

$I_1 = 0$ (was man auch aus dem Cauchyschen Integralsatz ohne Rechnung erhält)

$I_2 = 2\pi i \cdot \mathrm{Res}_2(f) = \dfrac{\pi i}{8}$, $I_3 = -\dfrac{\pi i}{8}$, $I_4 = I_2 + I_3 = 0$.

Alternativen:

(1) Herstellung einer PBZ:

$$\frac{1}{(\xi-2)(\xi+2)^2} = \frac{A}{\xi-2} + \frac{B}{\xi+2} + \frac{C}{(\xi+2)^2}$$

$$C = -\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{A}{\xi-2} + \frac{B}{\xi+2} = \frac{1}{(\xi-2)(\xi+2)^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{(\xi+2)^2} = \frac{1}{4(\xi-2)(\xi+2)^2}(4+\xi-2)$$

$$= \frac{1}{4(\xi-2)(\xi+2)} \rightsquigarrow A = \frac{1}{16}, \quad B = -\frac{1}{16}$$

so dass $\displaystyle \frac{1}{(\xi-2)(\xi+2)^2} = \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{\xi-2} - \frac{1}{16}\frac{1}{\xi+2} - \frac{1}{4}\frac{1}{(\xi+2)^2}$

Integriert man darüber, ergibt sich $I_1 = 0$, $I_2 = \frac{\pi i}{8}$, $I_3 = -\frac{\pi i}{8}$ und $I_4 = 0$.

(2) Für (I_1,) I_2 und I_3 hat man auch eine ganz schöne Lösung mit der Cauchy-Integralformel für den Kreisrand. Bsp.: Für I_3 setzt man

$f(\xi) = \frac{1}{\xi-2}$. Dann ist

$$\int_{\partial B_1^+(-2)} \frac{d\xi}{(\xi-2)(\xi+2)^2} = \int_{\partial B_1^+(-2)} \frac{f(\xi)\,d\xi}{(\xi+2)^2} \overset{\text{CIF}}{=} 2\pi i\, f'(-2) = \left.\frac{-2\pi i}{(\xi-2)^2}\right|_{\xi=-2}$$

$$= -\frac{\pi i}{8}.$$

Aufg. 4 $\qquad 4+7=11$ P.

(a) Bestimmen Sie den größten offenen Kreisring $K_{r,R}(0)$, auf dem die folgenden Laurentreihen konvergieren:

(i) $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{z^n}{3^n+4^{-n}}$; $\qquad$ (ii) $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{z^n}{\max(0,n)!}$

(b) Entwickeln Sie die auf $\mathbb{C}\setminus\{-i,i\}$ holomorphe Funktion $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$ um $z_0=i$ in eine Laurentreihe, und zwar

(i) auf $K_{0,2}(i)$, $\qquad$ (ii) auf $K_{2,\infty}(i)$.

Bestimmen Sie auch $\mathrm{Res}_i(f)$.

Lös.: (a, i): Nebenteil $f_1(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^n+4^{-n}}$

konvergiert wegen $\dfrac{1}{3^n+4^{-n}}\le\dfrac{1}{3^n}$ auf $B_3(0)$ und

wegen $\dfrac{1}{3^n+4^{-n}}\ge\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{3^n}$ auf keinem größeren Kreis. $\qquad$ 1P.

Hauptteil $f_2(z)=\displaystyle\sum_{-\infty}^{-1}\frac{z^n}{3^n+4^{-n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n+3^{-n}}\frac{1}{z^n}$ konvergiert (mit analoger Begründung) für alle $w=\dfrac{1}{z}$ mit $|w|<4$, also für alle z mit $|z|>\dfrac{1}{4}$. $\qquad$ 1P.

Zsf.: Die Reihe konvergiert auf $K_{\frac{1}{4},3}(0)$.

(a, ii) Nebenteil $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ konvergiert auf $\mathbb{C}$. $\qquad$ 1P.

Hauptteil: $\sum_{n=-\infty}^{-1} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n$ konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > 1$. 1P.

Zsf.: Die Reihe konvergiert auf $K_{1,\infty}(0)$.

(b,i) $$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{z-i} \cdot \frac{1}{z+i} = \frac{1}{z-i} \, \frac{1}{2i+(z-i)}$$

$$= \frac{1}{2i(z-i)} \, \frac{1}{1+\frac{z-i}{2i}}$$ 1P.

$$= \frac{1}{2i(z-i)} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(-2i)^n}$$ (geom. Reihe, 1P.)

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2i)^{n+1}} (z-i)^{n-1} = \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2i)^{n+2}} (z-i)^n$$ 1P.

Zusatzfrage: $\mathrm{Res}_i(f) = \frac{1}{2i}$. 1P.

(b,ii) $$f(z) \overset{\text{s.o.}}{=} \frac{1}{(z-i)^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{2i}{z-i}}$$ 1P.

$$= \frac{1}{(z-i)^2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2i)^n}{(z-i)^n}$$ (geom. Reihe, 1P.)

$$= \sum_{n=+2}^{\infty} (-1)^n (2i)^{n-2} \frac{1}{(z-i)^n} = \sum_{n=-\infty}^{-2} (-1)^n (2i)^{-n-2} (z-i)^n$$ 1P.

Aufg. 5 (1+4 P.): Es sei $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Gilt für ein $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, dass $f(z) = f(z+a)$ für alle $z \in \mathbb{C}$, so ist f konstant.

(b) Wenn es $a_1, a_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $\frac{a_1}{a_2} \notin \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$f(z) = f(z+a_1) = f(z+a_2)$$

für alle $z \in \mathbb{C}$, dann ist f konstant.

Lös.: (a) ist falsch, wie das Bsp. $f(z) = \sin(z)$ (mit $a = 2\pi$) zeigt. 1P.

(b) ist richtig.

Wir zeigen, dass f beschränkt ist. Dann folgt die Beh. aus dem Satz von Liouville. 1P.

Sei $P := \{\lambda a_1 + \mu a_2 : 0 \leq \lambda, \mu \leq 1\}$ und

$M := \max\{|f(z)| : z \in P\}$. $M \in \mathbb{R}$ existiert, weil P kompakt und f stetig ist. 1P.

Aufgrund der Vor. $a_1 \neq 0 \neq a_2$ und $\frac{a_1}{a_2} \notin \mathbb{R}$ ist P ein Parallelogramm (und nicht nur eine Strecke!), so dass

$$\mathbb{C} = \bigcup_{k_1, k_2 \in \mathbb{Z}} P + k_1 a_1 + k_2 a_2 .$$

D.h. zu jedem $z \in \mathbb{C}$ existieren $z_0 \in P$ und $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$,

so dass $z = z_0 + k_1 a_1 + k_2 a_2$. 1P.

Damit erhalten wir

$$f(z_0) = f(z_0 \pm a_1) = f(z_0 \pm 2a_1) = \ldots = f(z_0 + k_1 a_1 + k_2 a_2) = f(z)$$

und somit 1P.

$$|f(z)| = |f(z_0)| \leq M.$$

Aufg. 6: Berechnen Sie $\max\{|f(z)| : z \in \overline{B_1(0)}\}$ für die folgenden Funktionen:

$3 + \cancel{2} + 2 + 3$ P.

Teil (b) streichen!

(a) $f(z) = 3z^5 - 5z^3$,

(b) $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - a^2}$ mit einem $a \in \mathbb{C}$, für das $|a| > 1$,

(c) $f(z) = \sqrt{z+i}$ mit dem Hauptzweig der Wurzel und der stetigen Fortsetzung $f(-i) = 0$,

(d) $f(x+iy) = x^3 y - x y^3$.

Lös.: (a) Da f holomorph ist, wird das Betragsmaximum auf $\partial B_1(0)$ angenommen, also

$\max\{|f(z)| : z \in \overline{B_1(0)}\} = \max\{|3z^5 - 5z^3| : |z| = 1\}$ 1P.

$= \max\{|3z^2 - 5| : |z| = 1\}$ 1P.

Nun ist $|3z^2 - 5| \le 3|z|^2 + 5 \underset{|z|=1}{=} 8$

mit Gleichheit für $z^2 = -1$ (also $z \in \{\pm i\}$), so dass 1P.

$\max\{|f(z)| : |z| \le 1\} = 8$.

(b) Da $|a| > 1$ ist, ist f holomorph auf $B_{|a|}(0) \supset \overline{B_1(0)}$ und nimmt ihr Betragsmax. auf $\partial B_1(0)$ an und zwar genau dort, wo $\underbrace{|z^2 - a^2|}_{= |1 - \frac{a^2}{z^2}|}$ minimal wird. 1P.

Das ist genau für $z = \pm \frac{a}{|a|}$ der Fall, was auf

$|z^2 - a^2| = |a|^2 - 1$ bzw. auf

$$\max \{ |f(z)| : |z| \leq 1 \} = \frac{1}{|a|^2 - 1}$$ führt. 1P.

Hauptzweig

(c) $\sqrt{i+z} = \exp\left(\frac{1}{2} \operatorname{Log}(i+z)\right)$

$= \exp\left(\frac{1}{2} \ln(|i+z|) + \frac{i}{2} \arg(i+z)\right)$

$= \exp\left(\frac{1}{2} \ln(|i+z|)\right) \cdot e^{\frac{i}{2}\arg(i+z)}$, so dass

$$|\sqrt{i+z}| = \exp\left(\frac{1}{2} \ln(|i+z|)\right) = |i+z|^{\frac{1}{2}}$$ 1P.

Nun wird $|i+z|$ unter der NB $|z| \leq 1$ maximal, wenn $z = i$, also $|i+z| = 2$ ist, so dass

$$\max \{ |\sqrt{i+z}| : |z| \leq 1 \} = \sqrt{2}.$$ 1P.

(d) Zunächst stellt man fest, dass f der Imaginärteil von $\frac{1}{4} z^4$ ist, oder man checkt, dass $\Delta f(x+iy) = 6xy - 6xy = 0$ gilt. Nach dem Maximumprinzip nimmt also f ihr Max. auf $\partial B_1(0)$ an. 1P.

Damit können wir schreiben

$\max\{|f(x+iy)| : x^2+y^2 \leq 1\}$

$= \max\{|\cos(t)\sin(t)(\cos^2(t)-\sin^2(t))| : t \in \mathbb{R}\}$ 1P

wobei

~~ddd~~ $|\cos(t)\sin(t)(\cos^2(t)-\sin^2(t))|$

$= \frac{1}{2}|\sin(2t)\cos(2t)| = \frac{1}{4}|\sin(4t)| \leq \frac{1}{4}$

mit Gleichheit für $t = \frac{\pi}{8}$, so dass

$$\max\{|f(x+iy)| : x^2+y^2 \leq 1\} = \frac{1}{4}.$$ 1P.

Aufg. 7: Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe des Residuensatzes: 4+4 P.

(a) $$I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$$

(b) $$I_\varepsilon := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x+i\varepsilon}\,dx,$$ wobei $\varepsilon > 0$ sei. Zusatzfrage: Gilt $$\lim_{\varepsilon \searrow 0} I_\varepsilon = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,dx\,?$$ (Keine Begründung erforderlich!)

Also der Teil (a) wäre für 4P.

(a)
$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$$

Wir haben $(x^2+1)(x^2+4) = (x-i)(x+i)(x-2i)(x+2i)$ und die (einfachen!) Nullstellen in der oberen Halbebene sind $z_0 = i$ und $z_1 = 2i$. 1P.

Der Residuensatz ergibt (mit $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)}$)

$$I = 2\pi i \left(Res_i(f) + Res_{2i}(f) \right)$$ 1P.

mit

$$Res_i(f) = \frac{1}{\cancel{z}+i} \frac{1}{z-2i} \frac{1}{z+2i} \Big|_{z=i} = \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{-i} \cdot \frac{1}{3i} = \frac{1}{6i}$$ 1P.

und
$$Res_{2i}(f) = \frac{1}{z+i} \frac{1}{z-i} \cdot \frac{1}{z+2i} \Big|_{z=2i} = \frac{1}{3i} \cdot \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{4i} = \frac{-1}{12i}$$

so dass
$$I = 2\pi i \left(\frac{1}{6i} - \frac{1}{12i} \right) = \underline{\underline{\frac{\pi}{6}}}$$ 1P.

(b)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x+i\varepsilon}\,dx = \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{x+i\varepsilon}\,dx \qquad \varepsilon>0$$

$$= \frac{1}{2i}\Bigg(\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x+i\varepsilon}\,dx}_{=0} - \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ix}}{x+i\varepsilon}\,dx\Bigg) \quad 1P.$$

$$= -\frac{1}{2i}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x-i\varepsilon}\,dx \quad 1P. \qquad = -\frac{1}{2i}\cdot\Big(2\pi i\,\underbrace{Res_i(f)}_{e^{-\varepsilon}}\Big)$$

$$= -\frac{1}{2i}\cdot\frac{2\pi}{e^{\varepsilon}}(-i) = \cancel{\frac{\pi}{4}}\,\pi\cdot e^{-\varepsilon} \quad 1P. \quad \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \pi = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(x)}{x}\,dx \quad 1P.$$

$$\cancel{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(x)}{x+i\varepsilon}\,dx = \frac{\pi}{2i}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\sin(x)\underbrace{\left(\frac{1}{x+i\varepsilon}-\frac{1}{x}\right)}\,dx = -i\varepsilon\cdot\int$$

$$\frac{x-x-i\varepsilon}{x^2+i\varepsilon x} =$$

~~Also: Hier wollen wir hier keine Klausuraufgabe!~~

Aufg. 8: ~~(Biholomorphe Abbildungen)~~ (2+1+3 = 6P.)

(a) Geben Sie die Zuordnungsvorschrift der Cayley-Transformation f_i und ihrer Inversen f_i^{-1} an. 2P.

(b) Was ist das Bild der oberen Halbebene $\mathbb{H} := \{z = x+iy \in \mathbb{C} : y > 0\}$ unter f_i? 1P.

(c) Bestimmen Sie eine Funktion, die den vertikalen Streifen $S := \{z = x+iy \in \mathbb{C} : 0 < x < \pi, y \in \mathbb{R}\}$ biholomorph auf den Einheitskreis $B_1(0)$ abbildet. 3P.

Lös.: (a) $f_i(z) = \frac{z-i}{z+i}$ 1P, $f_i^{-1}(w) = i\,\frac{1+w}{1-w}$ 1P.

(b) $f_i(\mathbb{H}) = B_1(0)$ 1P.

(c) $f_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto iz$

bildet S biholomorph auf $iS = \{z = x+iy : x \in \mathbb{R}, 0 < y < \pi\}$ ab 1P.

$f_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad w \mapsto \exp(w)$

bildet den horizontalen Streifen iS biholomorph auf die obere Halbebene $\mathbb{H}$ ab. 1P.

Schließlich benutzt man $f_i : \mathbb{H} \to B_1(0),\ z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$,

was zusammen

$$f_i \circ f_2 \circ f_1(z) = f_i \circ \exp(iz) = \frac{\exp(iz)-i}{\exp(iz)+i} \quad 1P.$$

ergibt.