Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock
Joseph Adams M.Sc.

SoSe 2021
19.04.2021
Blatt 01

ÜBUNGEN ZUR FUNKTIONENTHEORIE

1. (2 Punkte) Jemand findet am Strand eine uralte Rumflasche und darin ein Pergament, unterzeichnet "Captain Kidd", in dem die Koordinaten einer Insel angegeben werden, wo ein Piratenschatz vergraben ist.

Auf der Insel sollen sich zwei Bäume und die Reste eines Blockhauses befinden. Um den Schatz zu finden, gehe man von der Blockhaustür geradlinig zum einen Baum, zähle dabei die Schritte, schwenke am Baum 90° nach rechts und gehe in der neuen Richtung ebenso viele Schritte, wie man vorher zum Baum gegangen ist. Dann schlage man einen Pflock ein. Man gehe zurück zur Blockhaustür und verfahre mit dem zweiten Baum genauso, nur dass man an diesem Baum nach links schwenkt. In der Mitte zwischen beiden Pflöcken liegt der Schatz.

Der Finder der Flasche fährt zur Insel, findet dort die beiden Bäume, aber keine Spur des Blockhauses. Kann er den Schatz trotzdem finden — besonders wenn er mit komplexen Zahlen umgehen kann?[1]

2. (1 + 1 + 2 Punkte) Es sei $z_0 \in \mathbb{C}$. Geben Sie in der Form $x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$ an welche komplexe Zahl der Spiegelung von z_0 entspricht an

(a) der imaginären Achse,
(b) der reellen Achse,
(c) der Diagonalen $D = \{x + ix \in \mathbb{C} \mid x \in \mathbb{R}\}$.

3. (6 Punkte) Für $z \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n(z) = (1 + \frac{z}{n})^n$. Zeigen Sie, dass (f_n) kompakt aber nicht gleichmäßig gegen

$$\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

konvergiert. (vgl. Analysis I, Abschnitt 3.4, Satz 2)

4. (4 Punkte) Berechnen Sie

(a) die dritten und die sechsten Einheitswurzeln,
(b) die dritten Wurzeln der komplexen Zahl $z_0 = -2 + 2i$

in der Form $a + ib$ (mit $a, b \in \mathbb{R}$).

Abgabe: elektronisch bis Mo., 26.04., 20.00 Uhr
Besprechung: 28./29.04., in den Übungen

[1] Nach: George Gamow. Zitiert aus: Gerthsen, Kneser, Vogel; Physik; 16. Auflage (1989)