Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock
Joseph Adams M.Sc.

SoSe 2021
26.04.2021
Blatt 02

ÜBUNGEN ZUR FUNKTIONENTHEORIE

5. (2 Punkte) Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f\colon G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $f(z) \in \mathbb{R}$ für alle $z \in G$. Zeigen Sie: f ist konstant. Gilt diese Aussage auch, wenn f auf einer offenen Teilmenge von $\mathbb{C}$ definiert ist?

6. (2 Punkte) Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ (mit $x, y \in \mathbb{R}$) sei $g(z) = x^3 - 3xy^2$. Bestimmen Sie $h\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, so dass $f = g + ih\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph ist. Ist f eindeutig bestimmt?

7. (2 Punkte) Nutzen Sie den binomischen Lehrsatz, um die komplexe Differenzierbarkeit der Monome $z \mapsto z^n$, $n \in \mathbb{N}$, in einem beliebigen Punkt $z \in \mathbb{C}$ zu beweisen.

8. (4 Punkte) Seien $U \subset \mathbb{C}$ offen mit $0 \notin U$ und $f\colon U \to \mathbb{C}$ stetig mit $f(z)^2 = z$ für alle $z \in U$. Zeigen Sie, dass f holomorph in U ist und bestimmen sie die Ableitung. Können Sie Ihr Ergebnis verallgemeinern auf den Fall, dass $f(z)^n = z$ gilt?

Hinweis: Überlegen Sie sich, dass aus der Bedingung $f(z)^2 = z$ (bzw. $f(z)^n = z$) folgt, dass f keine Nullstellen besitzt.

9. (6 Punkte) Bestimmen und skizzieren (oder beschreiben) Sie die Bilder der folgenden Teilmengen von $\mathbb{C}$ unter der Exponentialabbildung $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$:

(a) Der horizontalen Geraden $G_\alpha = \{x + i\alpha \in \mathbb{C} \mid x \in \mathbb{R}\}$,
(b) der vertikalen Geraden $G^b = \{b + ix \in \mathbb{C} \mid x \in \mathbb{R}\}$,
(c) des horizontalen Streifens $S_{\alpha,\gamma} = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid x \in \mathbb{R},\ \alpha < y < \gamma\}$,
(d) des vertikalen Streifens $S^{b,d} = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid b < x < d,\ y \in \mathbb{R}\}$,
(e) des achsenparallelen Rechtecks $R = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid b < x < d,\ \alpha < y < \gamma\}$.

Hierbei seine $0 \leq \alpha < \gamma \leq 2\pi$ und $b, d \in \mathbb{R}$ mit $b < d$. Welche dieser Mengen wird (bijektiv) auf die obere Halbebene $\mathbb{H} = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid x \in \mathbb{R},\ y > 0\}$ abgebildet? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Lösungen.

Abgabe: elektronisch bis Mo., 03.04., 20.00 Uhr
Besprechung: 05./06.05., in den Übungen