Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock
Joseph Adams M.Sc.

SoSe 2021
03.05.2021
Blatt 03

ÜBUNGEN ZUR FUNKTIONENTHEORIE

10. (6 Punkte) Es seien $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{C}$ offen, $f \in C^2(\Omega, \Omega')$ holomorph und $F \in C^2(\Omega')$. Zeigen Sie, dass für alle $z \in \Omega$

$$\Delta(F \circ f)(z) = \Delta F(f(z)) \cdot \left| \frac{\partial f}{\partial z}(z) \right|^2 .$$

Was ändert sich an dieser Gleichung, wenn f nicht holomorph, sondern antiholomorph ist?

Hinweis: Kettenregel für Wirtinger-Ableitungen.

11. (3 Punkte, Satz von Gauß-Lucas) Zeigen Sie: Die kritischen Stellen eines Polynoms $P \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit komplexen Koeffizienten liegen in der konvexen Hülle der Nullstellen von P.

Hinweis: Für kritische Stellen, die keine Nullstellen von P sind schauen Sie sich die logarithmische Ableitung P'/P an und verwenden eine Partialbruchzerlegung.

12. (2 + 2 Punkte) Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f_1, f_2, \ldots, f_n \colon G \to \mathbb{C}$ holomorphe zweimal stetig differenzierbare Funktionen. Zeigen Sie, dass auf G gilt

$$\frac{\partial^2 (f_1 \cdot \overline{f_2})}{\partial z \partial \overline{z}} = \frac{\partial^2 (f_1 \cdot \overline{f_2})}{\partial \overline{z} \partial z} = f_1' \overline{f_2'}.$$

Folgern Sie, dass, falls die Summe $\sum_{k=1}^n |f_k|^2$ konstant ist, bereits alle Funktionen f_k, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ konstant sind.

13. (2 + 2 Punkte) Zeigen Sie: Eine lineare Abbildung $A \colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto Ax$ ist bereits dann winkelerhaltend, wenn eine der nachstehenden Bedingungen erfüllt ist:

(a) Es gibt ein $\rho > 0$, so dass für alle Einheitsvektoren $e \in \mathbb{R}^k$ gilt, dass $|Ae| = \rho$.

(b) Es ist $A \neq 0$ und für alle $x, y \in \mathbb{R}^k$ mit $\langle x, y \rangle = 0$ gilt $\langle Ax, Ay \rangle = 0$.

Abgabe: elektronisch bis Mo., 17.05., 20.00 Uhr
Besprechung: 12./13.05., in den Übungen