Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock
Joseph Adams M.Sc.

SoSe 2021
10.05.2021
Blatt 04

ÜBUNGEN ZUR FUNKTIONENTHEORIE

14. (2 + 1 + 1 + 1 Punkte) Berechnen Sie die folgenden Wegintegrale:

(a) $\int_{\partial B_1(0)} \mathrm{Re}(z)\mathrm{d}z$,
(b) $\int_\gamma |z|\mathrm{d}z$ für $\gamma\colon [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \exp(it)$,
(c) $\int_\beta e^z\mathrm{d}z$ für $\beta\colon [0, \pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto it$,
(d) $\int_\eta |z|\mathrm{d}z$ für $\eta\colon [0, 1] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto 2it - i$.

15. (1 + 1 + 1 + 1 + 2 Punkte) Die Joukowski-Abbildung $J\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ ist definiert durch $J(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$.

(a) Zeigen Sie, dass J surjektiv ist und bestimmen Sie
(b) die Menge M aller $w \in \mathbb{C}$, die genau ein Urbild haben.
(c) Zeigen Sie, dass für $w \in \mathbb{C} \setminus M$ genau zwei Urbilder $z_\pm \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ existieren, für die $z_+z_- = 1$ gilt.
(d) Bestimmen Sie das Bild I von $\partial B_1(0)$ unter J und zeigen Sie
(e) dass J sowohl $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$ als auch $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ bijektiv und konform auf $\mathbb{C} \setminus I$ abbildet.

Hinweis zu (a): Übungen zur Analysis I aus dem Wintersemester 2019/20, Aufgabe 15.

Bemerkung: Ganz ähnlich wie in (e) sieht man, dass J sowohl die obere Halbebene $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im} z > 0\}$ wie auch die untere Halbebene $\overline{\mathbb{H}} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im} z < 0\}$ konform und bijektiv auf $\mathbb{C} \setminus J(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ abbildet; die Bestimmung des Bildes von $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ bereitet keine Schwierigkeiten. Können Sie beim derzeitigen Stand der Vorlesung ohne weiteres folgern, dass die jeweiligen Umkehrabbildungen ebenfalls holomorph sind? – Die technische Bedeutung der Joukowski-Abbildung liegt darin, dass sie Kreise geeigneter Lage und Größe auf Tragflächenquerschnitte abbildet, was die entsprechenden strömungsmechanischen Berechnungen wesentlich vereinfacht. Auf `https://bit.ly/JoukowskiAbb` können Sie sich selbst ein Bild machen.

Bitte wenden!

16. (1 + 2 + 4 + 3 Punkte) Es sei

$$I\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\,, \quad x \mapsto I(x) = \frac{x}{|x|^2}$$

die Inversion an der Einheitssphäre. Zeigen Sie:

(a) I ist zu sich selbst invers,
(b) I ist konform,
(c) I bildet Sphären (im Definitionsbereich) bijektiv auf Sphären ab.

Wie ist die Aussage in (c) zu modifizieren, wenn Sie I stetig zu $\hat{I}\colon \hat{\mathbb{R}}^n \to \hat{\mathbb{R}}^n$ fortsetzen? (Hierbei ist $\hat{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ die Kompaktifizierung von $\mathbb{R}^n$ nach Alexandroff.)

Abgabe: elektronisch bis Mo., 17.05., 20.00 Uhr
Besprechung: 19./20.05., in den Übungen