Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock
Joseph Adams M.Sc.

SoSe 2021
17.05.2021
Blatt 05

ÜBUNGEN ZUR FUNKTIONENTHEORIE

17. (2 + 1 + 2 Punkte) Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \exp(-x^2)$. In der folgenden Aufgabe sollen Sie den Wert des sog. Gauß-Integrals $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ ausrechnen.

(a) Zeigen Sie, dass für $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)^n \mathrm{d}x$ gilt $\lim_{n\to\infty} nI_n^2 = \frac{\pi}{2}$. Multiplizieren Sie dafür $I_{2k}I_{2k+1}$ und nutzen Sie eine Induktion.
(b) Zeigen Sie anhand der Potenzreihen, dass $1 - x^2 \leq f(x) \leq \frac{1}{1+x^2}$.
(c) Folgern Sie schließlich $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \sqrt{\pi}$ indem Sie (b) integrieren, geschickt substituieren und Ihre Ergebnisse aus (a) verwenden.

Hinweis zu (a): In der Vorlesung Analysis I, Abschnitt 6.4 finden Sie eine hilfreiche Formel.

18. (4 Punkte, Fresnel Integrale) Berechnen Sie die folgenden uneigentlichen Riemann-Integrale

$$\int_0^\infty \cos(x^2)\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad \int_0^\infty \sin(x^2)\mathrm{d}x.$$

Integrieren Sie dazu die Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto e^{-z^2}$ über den Rand des Dreiecks aufgespannt von den Punkten 0, R, und $(1+i)R$, nutzen Sie den Cauchyschen Integralsatz und lassen Sie dann $R \to \infty$.

19. (4 Punkte) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte einer Gauß-Funktion, d.h. berechnen Sie für $\xi \in \mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} e^{-x^2} \mathrm{d}x.$$

Integrieren Sie dazu die Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto e^{-z^2}$ über den Rand des Rechtecks mit den Eckpunkten $-R$, R, $R + \frac{i\xi}{2}$ und $-R + \frac{i\xi}{2}$. Nutzen sie anschließend den Cauchyschen Integralsatz und lassen Sie $R \to \infty$.

Bitte wenden!

20. (1 + 1 + 2 + 1 Punkte) Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel oder des Cauchyschen Integralsatzes

(a) $\displaystyle\int_{\partial B_2(0)^+} \frac{\xi - \cos(\xi)}{\xi^4} \mathrm{d}\xi$ (b) $\displaystyle\int_{\partial B_{\frac{1}{2}}(3i)^+} \sin(\xi)^4 \mathrm{d}\xi$

(c) $\displaystyle\int_{\partial B_1(1)^+} \frac{1}{\xi^4 - \xi^2 - \frac{3}{4}} \mathrm{d}\xi$ (d) $\displaystyle\int_{\partial B_1(i)^-} \frac{2}{2\xi - i} \mathrm{d}\xi$

Hinweis: Bei (c) ist eine Partialbruchzerlegung eine Möglichkeit, es gibt aber auch einen elementareren Weg.

Abgabe: elektronisch bis Di., 25.05., 20.00 Uhr
Besprechung: 26./27.05., in den Übungen