Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock
Joseph Adams M.Sc.

SoSe 2021
24.05.2021
Blatt 06

# ÜBUNGEN ZUR FUNKTIONENTHEORIE

**21. (4 Punkte)** Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in \Omega$ und $f\colon \Omega \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Es gebe $\epsilon > 0$, $M > 0$ und $\alpha \in (0,1)$, so dass

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z - z_0|^\alpha}$$

für alle $z \in B_\epsilon(z_0) \setminus \{z_0\}$. Zeigen Sie, dass es eine holomorphe Fortsetzung $\tilde{f}\colon \Omega \to \mathbb{C}$ von $f$ gibt.

**22. (6 + 2 Punkte, Schwarzsches Spiegelungsprinzip)** Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $\Omega_\pm = \{z = x + iy \in \Omega \mid \pm y > 0\}$ und $\Omega_0 = \{z = x + iy \in \Omega \mid y = 0\}$.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Morera: Eine stetige Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, die auf $\Omega_+ \cup \Omega_-$ holomorph ist, ist auf dem gesamten Bereich $\Omega$ holomorph.

(b) Nun sei $\Omega$ zusätzlich symmetrisch zur reellen Achse, also $\Omega_- = \{\overline{z} \mid z \in \Omega_+\}$, und $f_0\colon \Omega_+ \cup \Omega_0 \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, die auf $\Omega_+$ holomorph und auf $\Omega_0$ reellwertig ist. Zeigen Sie, dass durch

$$f\colon \Omega \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto f(z) = \begin{cases} f_0(z), & \mathrm{Im} z \geq 0 \\ \overline{f_0(\overline{z})}, & \mathrm{Im} z \leq 0 \end{cases}$$

eine (auf ganz $\Omega$) holomorphe Funktion definiert wird.

**23. (1 + 3 Punkte, Landaus Maximumprinzip)** Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in \Omega$, $r > 0$ und $\overline{B_r(z_0)} \subset \Omega$. Weiter sei $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie

(a) mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel

$$|f(z)| \leq \frac{r}{r - |z - z_0|} \sup_{|\xi - z_0| = r} |f(\xi)| \quad \text{für alle } z \in B_r(z_0), \text{ und}$$

(b) das Maximumprinzip für die Kreisschreibe, d.h.

$$|f(z)| \leq \sup_{|\xi - z_0| = r} |f(\xi)| \quad \text{für alle } z \in B_r(z_0).$$

**Abgabe:** elektronisch bis Mo., 07.06., 20.00 Uhr
**Besprechung:** 09./10.06., in den Übungen