Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock
Joseph Adams M.Sc.

SoSe 2021
07.06.2021
Blatt 07

ÜBUNGEN ZUR FUNKTIONENTHEORIE

24. (2 + 1 + 3 + 1 + 2 Punkte) Die Eulerschen Zahlen E_n werden für $n \in \mathbb{N}_0$ definiert durch die Gleichung

$$\operatorname{sech}(z) = \frac{1}{\cosh(z)} = \frac{2}{e^z + e^{-z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{n!} z^n.$$

Bestimmen Sie den Konvergenzradius dieser Reihe und zeigen Sie

(a) $E_{2n+1} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
(b) $E_0 = 1$ und für alle $n \geq 1$ gilt $E_{2n} = -\sum_{k=0}^{n-1} E_{2k}\binom{2n}{2k}$.
(c) $E_{2n} \in \mathbb{Z}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
(d) Aus $\tanh(z) = \sinh(z)\operatorname{sech}(z)$ folgt für $n \geq 1$

$$B_{2n} = \frac{2n}{4^n(4^n - 1)} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{2k} E_{2k}.$$

(Hierbei sind B_n die Bernoullischen Zahlen.)

25. (2 + 2 Punkte) Entwickeln Sie die folgenden Funktionen um den angegebenen Entwicklungspunkt z_0 in eine Potenzreihe und bestimme Sie deren Konvergenzradius.

$$\text{(a)} \quad f(z) = \frac{1}{5-z}, \quad z_0 = 3, \qquad \text{(b)} \quad f(z) = \cos(z)^3, \quad z_0 = 0.$$

26. (3 Punkte) Zeigen Sie: Das Bild einer nicht konstanten ganzen Funktion ist dicht in $\mathbb{C}$.

27. (2 Punkte) Sind $f, g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ganze Funktionen mit $|f(z)| \leq |g(z)|$ für alle $z \in \mathbb{C}$, so gilt: $f = a \cdot g$ für ein $a \in \mathbb{C}$.

Abgabe: elektronisch bis Mo., 14.06., 20.00 Uhr
Besprechung: 16./17.06., in den Übungen