Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock
Joseph Adams M.Sc.

SoSe 2021
14.06.2021
Blatt 08

ÜBUNGEN ZUR FUNKTIONENTHEORIE

28. (2 + 2 Punkte, Schwarzsches Lemma)

(a) Es sei $h\colon B_1(0) \to B_1(0)$ eine holomorphe Funktion mit $h(0) = 0$. Zeigen Sie: $|h'(0)| \leq 1$.

(b) Für eine biholomorphe Funktion $f\colon B_1(0) \to \Omega \subset \mathbb{C}$ zeige man

$$|f'(0)| \geq \operatorname{dist}(f(0), \partial\Omega).$$

Hinweis zu (b): Wenden Sie (a) an auf die Funktion $h(z) = f^{-1}(f(0) + rz)$, wobei $r > 0$ der Radius eines Kreises $B_r(f(0)) \subset \Omega$ ist.

29. (3 Punkte) Finden Sie eine Homotopie $H\colon [0, 2\pi] \times [0, 1] \to \mathbb{C}$ der Form

$$H\colon (t, s) \mapsto H(t, s) = r(t, s)e^{it}$$

mit $r(t, s) > 0$, so dass

(i) $\gamma_0\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \gamma_0(t) = H(t, 0)$ den Rand des Quadrats

$$Q_0 = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid |x|, |y| \leq 1\} \quad \text{und}$$

(ii) $\gamma_1\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \gamma_1(t) = H(t, 1)$ den Rand des Quadrats

$$Q_1 = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid |x| + |y| \leq 1\}$$

parametrisiert.

Hinweis: Es ist sinnvoll, die Sache so einzurichten, dass für $0 \leq s \leq 1$ die Kurve $\gamma_s\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \gamma_s(t) = H(t, s)$ gerade den Rand des Einheitskreises bezüglich der p-Norm (mit $p = \frac{1}{s}$) in $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ beschreibt.

30. (2 Punkte) Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet und $f\colon G \to \mathbb{C}$ holomorph mit der folgenden Eigenschaft: Es gibt ein $a \in \mathbb{C}$, so dass für jedes $z_0 \in \partial G$ gilt $\lim\limits_{\substack{z \to z_0 \\ z \in G}} f(z) = a$.

Zeigen Sie, dass $f(z) = a$ für alle $z \in G$ gilt.

Bitte wenden!

31. (2 Punkte) Beweisen Sie den (ersten Teil des) Fundamentalsatzes der Algebra mit Hilfe des Minimumprinzips. Nutzen Sie dazu Lemma 2 aus Abschnitt 9.

32. (1 + 1 + 1 + 1 + 1 Punkte) Bestimmen Sie das Maximum von $|f|$ für die folgenden Funktionen $f\colon \overline{B_1(0)} \to \mathbb{C}$:

(a) $f(z) = e^{z^2}$
(b) $f(x+iy) = xy$
(c) $f(z) = z^2 + z - 1$
(d) $f(z) = \cos(z)$
(e) $f(z) = |z|^2 - |z|^4$

Abgabe: elektronisch bis Mo., 21.06., 20.00 Uhr
Besprechung: 23./24.06., in den Übungen