Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock
Joseph Adams M.Sc.

SoSe 2021
21.06.2021
Blatt 09

ÜBUNGEN ZUR FUNKTIONENTHEORIE

33. (3 Punkte) Es sei $P\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto P(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ ein komplexes Polynom mit den Nullstellen $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$. Für ein $R > 0$ und ein $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ seien $z_1, z_2, \ldots, z_k \in B_R(0)$ und $z_{k+1}, z_{k+2}, \ldots, z_n \in \overline{B_R(0)}^c$. Berechnen Sie

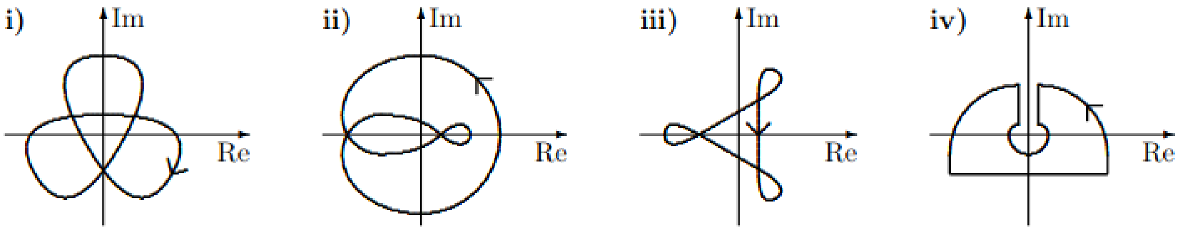
$$\int_{\partial B_R(0)^+} \frac{P'(z)}{P(z)} \mathrm{d}z.$$

34. (1 + 1 Punkte) Gibt es eine oder mehrere holomorphe Funktionen $f\colon B_1(0) \to \mathbb{C}$, die

$$\text{(a)} \quad f\left(\frac{1}{2k}\right) = f\left(\frac{1}{2k-1}\right) = \frac{1}{k} \quad \text{bzw.} \quad \text{(b)} \quad f\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{k}{k+1}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ erfüllen?

35. (1 + 1 + 1 + 1 Punkte) Berechnen Sie $\int_\gamma z^{-1} \mathrm{d}z$ über die folgenden Wege



36. (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Menge der holomorphen Funktionen auf einem Gebiet nullteilerfrei ist, d.h. für ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{C}$ und zwei holomorphe Funktionen $f, g\colon \Omega \to \mathbb{C}$ folgt aus $f \cdot g \equiv 0$ bereits $f \equiv 0$ oder $g \equiv 0$.

Hinweis: Zusammen mit den offensichtlichen Eigenschaften (also, dass $\mathcal{O}(\Omega)$ einen kommutativen Ring mit 1 bildet) bedeutet dies, dass $\mathcal{O}(\Omega)$ ein Integritätsbereich ist.

Bitte wenden!

37. (1 + 2 + 1 Punkte)

(a) Zeigen Sie den Satz von Liouville für harmonische Funktionen: Eine beschränkte harmonische Funktion $u\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ ist konstant.

(b) Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f \in C(\Omega)$ und $g \in C(\partial\Omega)$. Beim Dirichlet-Problem für die Poisson-Gleichung

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x) & \text{für } x \in \Omega, \\ u(x) = g(x) & \text{für } x \in \partial\Omega \end{cases}$$

ist eine Lösung $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ gesucht. Zeigen Sie: Falls Ω beschränkt ist und eine Lösung des Dirichlet-Problems existiert, so ist diese eindeutig.

(c) In (b) wählen wir $\Omega = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$ die obere Halbebene. Zeigen oder widerlegen Sie: Das Dirichlet-Problem hat höchstens eine Lösung.

Abgabe: elektronisch bis Mo., 28.06., 20.00 Uhr
Besprechung: 30.06/01.07., in den Übungen