Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock
Joseph Adams M.Sc.

SoSe 2021
28.06.2021
Blatt 10

ÜBUNGEN ZUR FUNKTIONENTHEORIE

38. (4 Punkte) Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $M \subset \Omega$ und $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in \Omega$. Welche der nachstehenden Eigenschaften von M werden auf $f(M)$ vererbt? Begründen Sie.

(a) Kompaktheit (b) Konvexität (c) Offenheit

(d) Schnittwinkel, wenn M aus den Bildern zweier sich schneidenden differenzierbaren Kurven besteht

39. (4 Punkte) Bestimmen Sie

(a) alle Logarithmen von z_0 (also alle Lösungen $w \in \mathbb{C}$ der Gleichung $e^w = z_0$) für

(i) $z_0 = -i$ (ii) $z_0 = -e$ und

(b) den Hauptwert des Logarithmus von z_0 für

(i) $z_0 = (1+i)^5$ (ii) $z_0 = (-1 - i\sqrt{3})^3$.

40. (4 Punkte)

(a) Welche der beiden Zahlen $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ und $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ ist gleich $i^{\frac{1}{2}}$ und warum?

(b) Bestimmen Sie $(\frac{1}{i})^{\frac{1}{2}}$.

(c) Geben Sie $z, w \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ an, so dass $zw \notin (-\infty, 0]$ und $(zw)^{\frac{1}{2}} \neq z^{\frac{1}{2}} w^{\frac{1}{2}}$.

(d) Geben Sie $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ an, so dass $z^3 \notin (-\infty, 0]$ und $(z^3)^{\frac{1}{3}} \neq z$.

Hinweis: Mit $z^{\frac{1}{2}}$ bzw. $z^{\frac{1}{3}}$ ist der Hauptzweig der entsprechenden Wurzel gemeint.

41. (1 + 1 + 2 Punkte) Es sei $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{iy \in \mathbb{C} \mid y \leq 0\}$.

(a) Es sei f_1 derjenige Zweig des Logarithmus auf Ω, der auf $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) < 0, \mathrm{Im}(z) < 0\}$ mit dem Hauptzweig übereinstimmt. Bestimmen Sie $f_1(1)$.

(b) Gibt es einen Zweig f_2 des Logarithmus auf Ω mit $f_2(i) = -\frac{i\pi}{2}$?

(c) Gibt es einen Zweig f_3 des Logarithmus auf Ω mit $f_3(1) = 4f_3(i)$?

Abgabe: elektronisch bis Mo., 05.07., 20.00 Uhr
Besprechung: 07.07/08.07., in den Übungen