Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock
Joseph Adams M.Sc.

SoSe 2021
05.07.2021
Blatt 11

ÜBUNGEN ZUR FUNKTIONENTHEORIE

42. (3 Punkte) Wir definieren die Bessel-Funktionen erster Art $J_n \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, für $n \in \mathbb{Z}$ durch: Der Funktionswert $J_n(a)$ ist gegeben als der Koeffizient von z^n in der Laurent-Reihe der in dem Ringgebiet $K_{0,\infty}(0)$ holomorphen Funktion $f_a(z) = \exp(\frac{a}{2}(z - \frac{1}{z}))$ für $a \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie:

$$J_n(a) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(a \sin t - nt) \mathrm{d}t.$$

43. (3 Punkte) Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes:

(a) $\displaystyle\int_{\partial B_2(0)^+} \frac{\cos z}{z^2+1} \mathrm{d}z$ (b) $\displaystyle\int_{\partial B_2(0)^+} \exp\left(\frac{z}{1-z}\right) \mathrm{d}z$ (c) $\displaystyle\int_{\partial G^+} \frac{z}{\cosh z - 1} \mathrm{d}z$

dabei ist ∂G^+ der positiv orientierte Rand der Menge $G = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid y^2 < (4\pi^2 - 1)(1 - x^2)\}$.

44. (4 Punkte) Für $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $b > \pi^2$ berechnen Sie:

(a) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{t^2+1}{t^4+1} \mathrm{d}t$ (b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos t}{t^2+a^2} \mathrm{d}t$ (c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\pi t}}{t^2+2t+2} \mathrm{d}t$ (d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t \cos t}{t^2 - 2\pi t + b} \mathrm{d}t$

45. (3 Punkte) Es sei $\nu \in (0, \infty)$. Für welche $\mu > 0$ existiert das Integral

$$I_{\mu,\nu} = \int_0^{\infty} \frac{x^{\mu-1}}{1+x^{\nu}} \mathrm{d}x \ ?$$

In diesem Fall berechne man $I_{\mu,\nu}$.

46. (5 Punkte) Es seien $k \in \mathbb{N}$ und B_{2k} die Bernoulli-Zahlen zu geraden Indizes. Beweisen Sie die Eulerschen Formeln

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{(-1)^{k+1}}{2(2k)!} (2\pi)^{2k} B_{2k}$$

indem Sie die Potenzreihen- und Partialbruchentwicklungen von $z \mapsto \pi \cot(\pi z)$ gleichsetzen, den Faktor $\frac{1}{z^2-n^2}$ für $|z| < 1$ in eine geometrische Reihe entwickeln und anschließend einen Koeffizientenvergleich durchführen. Was ergibt sich für $k \in \{1, 2, 3\}$?

Abgabe: elektronisch bis Mo., 12.07., 20.00 Uhr
Besprechung: 14.07/15.07., in den Übungen