Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock
Joseph Adams M.Sc.

SoSe 2021
12.07.2021
Blatt 12

ÜBUNGEN ZUR FUNKTIONENTHEORIE

47. (4 + 1 (+ 3) Punkte) Beweisen Sie die Produktentwicklung des Sinus, das ist

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

(a) für $z = x \in [\epsilon, 1-\epsilon]$, indem Sie die Partialbruchentwicklung des Cotangens (unbestimmt) integrieren, und
(b) für alle $z \in \mathbb{C}$.

Warum ist die Abbildung $z \mapsto \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$ eine ganze Funktion?

Bemerkung: Mit der Beantwortung der Zusatzfrage können bis zu 3 Zusatzpunkte erreicht werden. Für $z = \frac{1}{2}$ erhält man die Wallissche Produktdarstellung für π, also die Gleichung

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)}.$$

48. (3 Punkte) Man beweise die Formel $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-t^2)\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$ indem man die Funktion

$$f(z) = \frac{\exp(-z^2)}{1 + \exp(-2az)} \quad \text{mit } a = e^{\frac{i\pi}{4}}\sqrt{\pi}$$

längs eines Parallelogramms mit den Ecken $-R$, R, $R+a$ und $-R+a$ integriert und danach den Grenzübergang $R \to \infty$ vollzieht. Verwenden Sie: $f(z) - f(z+a) = \exp(-z^2)$.

49. (3 Punkte) Zeigen Sie, dass jede injektive ganze Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ von der Form $f(z) = az + b$ für $a, b \in \mathbb{C}$ mit $a \neq 0$ ist.

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $z \mapsto f(\frac{1}{z})$ und nutzen Sie den Satz von Casorati-Weierstraß.

Bitte wenden!

50. (3 Punkte) Es sei $S = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid 0 < x < 1,\ y \in \mathbb{R}\}$ ein Streifen und $f\colon \overline{S} \to \mathbb{C}$ stetig und in S holomorph. Weiter existiere eine Konstante $c > 0$, so dass die Wachstumseinschränkung $|f(z)| \leq \exp(c \cdot |\mathrm{Im}(z)|)$ für alle $z \in S$ gilt. Zeigen Sie:

$$\max_{z \in \overline{S}} |f(z)| = \max_{z \in \partial S} |f(z)|.$$

Hinweis: Benutzen Sie die Funktion $g(z) = f(z) \exp(\epsilon z^2)$ und das Maximumprinzip.

Abgabe: elektronisch bis Mo., 19.07., 20.00 Uhr
Besprechung: 21.07/22.07., in den Übungen