Vorlesung: <u>Funktionentheorie</u>

Funktionentheorie (engl.: complex analysis) ist die Theorie der komplex differenzierbaren Funktionen

$$f = g + ih : \Omega \to \mathbb{C}.$$

Hierbei sind $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ offen (ein sogenannter "Bereich") und $g, h : \Omega \to \mathbb{R}$ reellwertige Funktionen. Eine Funktion f wie oben heißt in $z_0 \in \Omega$ <u>komplex differenzierbar</u>, wenn der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(f(z_0 + h) - f(z_0) \right) = f'(z_0) \in \mathbb{C}$$

existiert. In diesem Fall nennt man wie üblich $f'(z_0)$ die Ableitung von f in z_0. Das sieht zwar genauso aus wie in Analysis I oder wie bei der Ableitung differenzierbarer Kurven im $\mathbb{R}^2$, es gibt aber einen entscheidenden Unterschied: Im $\lim_{h \to 0} \ldots$ sind für h alle Nullfolgen $(h_n)_n$ in $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ zugelassen, für die $z_0 + h_n \in \Omega$ liegt. Dieser auf den ersten Blick geringfügige Unterschied hat weitreichende Konsequenzen:

(1) Viele reell differenzierbare (= total differenzierbare i.S.d. Analysis II) Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \supset \Omega \to \mathbb{R}^2$ sind <u>nicht komplex</u> diff'bar.

(2) Ist f (wie oben) in jedem Punkt $z_0 \in \Omega$ komplex differenzierbar, nennt man f holomorph[1]. Solche Funktionen erweisen sich als unendlich oft differenzierbar. Mehr noch: Sie können um jeden Punkt $z_0 \in \Omega$ in eine Taylorreihe entwickelt werden, die auf jedem Kreis $B_r(z_0) \subset \Omega$ konvergiert.

(3) Ungemütlichkeiten wie Funktionen, die (sagen wir) 27 mal differenzierbar sind aber eine unstetige 27. Ableitung haben, werden in der Funktionentheorie nicht betrachtet. Andererseits muss man allerdings auf so nützliche analytische Objekte wie unendlich oft differenzierbare Fktn. mit kompaktem Träger verzichten (solche stimmen nämlich am Rand ihres Trägers nicht mit ihrer Taylorreihe überein).

Beginnen wir mit einer kurzen Rekapitulation dessen, was wir insbesondere in der Analysis I bereits über komplexe Zahlen gelernt haben:

---

1) wörtlich ungefähr: Von voller (oder ganzer) Gestalt.

1. $\mathbb{C}$

1.1 Der Körper der komplexen Zahlen

Für $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ und $w = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ haben wir neben der auf dem $\mathbb{R}^2$ üblichen Addition

$$z + w := \begin{pmatrix} x+u \\ y+v \end{pmatrix}$$

eine Multiplikation definiert durch

$$z \cdot w := \begin{pmatrix} xu - yv \\ xv + yu \end{pmatrix}.$$

Damit wird $\mathbb{C} := (\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ zu einem Körper, das Einselement ist $1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, das inverse Element von $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ist

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{x^2+y^2} \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}.$$

Besondere Bedeutung kommt der Lösung $i := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ der Gleichung $z^2 + 1 = 0$ zu. Sie wird als imaginäre Einheit bezeichnet, manchmal schreibt man auch $i = \sqrt{-1}$. Hiermit nimmt $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ die Gestalt $z = x + iy$ an. Hierbei werden

$\operatorname{Re} z := x$ als der Realteil,

$\operatorname{Im} z := y$ " " Imaginärteil und

$\bar{z} = x - iy$ als die komplex konjugierte

von z bezeichnet.

Wie in jedem Körper gelten:

(1) Die Nullteilerfreiheit:

$$z \cdot w = 0 \implies z = 0 \vee w = 0;$$

(2) der binomische Lehrsatz: $\forall n \in \mathbb{N}$, $z, w \in \mathbb{C}$ ist

$$(z+w)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k};$$

(3) die geometrische Summenformel: $\forall n \in \mathbb{N}$, $z, w \in \mathbb{C}$ ist: $z^n - w^n = (z-w) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} z^k w^{n-1-k}$.

1.2 Vektorraumstruktur und lineare Abbildungen

Wir können $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ in zweierlei Weisen als Vektorraum auffassen. Zum einen als zweidimensionalen VR über dem Körper $\mathbb{R}$. Dann ist eine kanonische Basis gegeben durch die Vektoren $1 = \binom{1}{0}$ und $i = \binom{0}{1}$. In dieser Betrachtungsweise ist eine Abbildung $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ genau dann linear, wenn gilt

$$T(\lambda z + \mu w) = \lambda T(z) + \mu T(w) \quad \forall z, w \in \mathbb{C}\ \underline{\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}}$$

Das ist genau dann der Fall, wenn es eine reelle 2×2-Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ gibt, so dass (mit $z = x + iy = \binom{x}{y}$):

$$T(z) = Az = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Zur Unterscheidung nennt man solche Abbildungen $\mathbb{R}$-linear.

Andererseits ist $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C} = \mathbb{C}^1$ ein eindimensionaler Vektorraum über dem Körper $\mathbb{C}$. Eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $T: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ wird dann definiert durch die Forderung

$$T(\lambda z + \mu w) = \lambda T(z) + \mu T(w) \quad \forall z, w \in \mathbb{C}\ \underline{\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}},$$

was genau dann der Fall ist, wenn es eine komplexe Zahl $\gamma = \alpha + i\beta$ (mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) gibt, so dass

$$\begin{aligned} T(z) &= \gamma \cdot z = (\alpha + i\beta)(x + iy) = \alpha x - \beta y + i(\alpha y + \beta x) \\ &= \begin{pmatrix} \alpha x - \beta y \\ \beta x + \alpha y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2}$$

Der Vergleich von (1) und (2) zeigt:

- Jede $\mathbb{C}$-lineare Abbildung ist auch $\mathbb{R}$-linear.
- Eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung wie in (1) ist genau dann $\mathbb{C}$-linear, wenn $c = -b$ und $d = a$ ist.

Zudem ergibt unsere kurze Rechnung zu (2) die Interpretation der Multiplikation mit einer festen komplexen Zahl ($z \mapsto \gamma \cdot z$) als Drehstreckung:

$$\gamma \cdot z = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}}_{\text{Streckung (homogen)}} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}}_{\text{Drehung}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{Wähle } r, \varphi, \text{ so dass } \alpha = r\cos\varphi,\ \beta = r\sin\varphi}$

Differenzierbarkeit bedeutet Approximierbarkeit durch affin-lineare Abbildungen.

$$f\binom{x+h}{y+k} = f\binom{x}{y} + Df\binom{x}{y}\binom{h}{k} + \varphi\binom{h}{k}, \quad \text{Jacobi-Matrix}$$

mit $\lim\limits_{(h,k)\to 0} \varphi\binom{h}{k}/|(h,k)| = 0$ haben wir in Analysis II als definierende Eigenschaft total differenzierbarer Funktionen gelernt. Wir werden sehen, dass eine reell differenzierbare Funktion genau dann komplex d'bar ist, wenn die approximierende lineare Abbildung $\mathbb{C}$-linear ist, d.h., wenn ihre Jacobi-Matrix $Df\binom{x}{y}$ schiefsymmetrisch ist wie in (2).

1.3 Euklidische Struktur

Vom $\mathbb{R}^2$ erbt $\mathbb{C}$ das Skalarprodukt $\langle\binom{x}{y},\binom{u}{v}\rangle = xu + yv$, das in komplexer Schreibweise mit $z = x+iy$ und $w = u+iv$ die Gestalt

$$\langle z, w\rangle = \operatorname{Re} z\bar{w} \quad (= \operatorname{Re}(xu + yv + i(-xv + yu)))$$

annimmt.[1] Damit ist die Orthogonalität von $z, w \in \mathbb{C}$ erklärt ($z \perp w \Leftrightarrow \langle z, w\rangle = \operatorname{Re} z\bar{w} = 0$), und mit

$$|z| := \langle z, z\rangle^{1/2} = (x^2 + y^2)^{1/2}$$

die Euklidische Norm (= Länge) von $z \in \mathbb{C}$, die

---

1) Frage: Welche geometrische Bedeutung hat $|\operatorname{Im}(z\bar{w})|$?

nichts anderes ist als der Absolutbetrag der komplexen Zahl z. Beides zusammen erlaubt die Bestimmung des Winkels α zwischen $z, w \in \mathbb{C}$ gemäß

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle z, w\rangle}{|z||w|} = \frac{\operatorname{Re} z\overline{w}}{|z||w|}.$$

Wir werden feststellen, dass die <u>lokale</u> Winkeltreue ein wesentliches Merkmal holomorpher Funktionen ist: Schnittwinkel differenzierbarer Kurven bleiben unter solchen Abbildungen erhalten.

1.4 Metrik und Topologie

Mit der Euklidischen Norm verfügt $\mathbb{C}$ über die

<u>Metrik</u>: $\quad d(z,w) = |z-w| = \left((x-u)^2+(y-v)^2\right)^{1/2} \quad \begin{pmatrix} z = x+iy \\ w = u+iv \end{pmatrix}$

und damit über eine Topologie (= System offener Mengen, welches $\emptyset, \mathbb{C}$ umfasst und abgeschlossen ist unter endlichen Durchschnitten und beliebigen Vereinigungen). Hierbei heißt $\Omega \subset \mathbb{C}$ (wie üblich in einem metrischen Raum) <u>offen</u>, wenn gilt:

$$\forall z \in \Omega \ \exists \varepsilon > 0, \text{ sodass } B_\varepsilon(z) = \{w \in \mathbb{C} : d(z,w) < \varepsilon\} \subset \Omega.$$

Die Komplemente der offenen Mengen heißen <u>abgeschlossen</u>. $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ ist <u>vollständig</u>, d.h. jede Cauchy-Folge in $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ konvergiert.

1.4.1 Kompaktheit

Eine Teilmenge K eines metrischen Raumes heißt <u>kompakt</u>, wenn jede Folge $(z_n)_n$ in K eine (in K) konvergente Teilfolge besitzt. Die folgende (für topologische Räume formulierte) Überdeckungseigenschaft ist in metrischen Räumen hierzu äquivalent:

<u>Heine-Borelsche Überdeckungseigenschaft</u>: Es sei I eine beliebige Indexmenge und $(\Omega_i)_{i\in I}$ eine Familie offener Mengen, so dass $K \subset \bigcup_{i\in I} \Omega_i$. Dann existiert eine endliche Teilmenge $I_0 \subset I$, so dass bereits $K \subset \bigcup_{i\in I_0} \Omega_i$.

(Einen Beweis der Äquivalenz von "Folgenkompaktheit" und "Überdeckungskompaktheit" in metrischen Räumen finden Sie in: Koballo, Band II, Theo. 10.9.)

Als Folgerung aus der Überdeckungskompaktheit erhält man die nachstehende Verallgemeinerung des Intervallschachtelungsprinzips:

Cantorscher Durchschnittssatz: Es seien (X,d) ein metrischer Raum und $K_0 \supset K_1 \supset \ldots \supset K_n \supset K_{n+1} \supset \ldots$ eine absteigende Folge nicht leerer Kompakta. Dann ist

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} K_n \neq \emptyset .$$

Ist darüber hinaus (mit $\operatorname{diam}(K) := \sup\{d(x,y), x,y \in K\}$) $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(K_n) = 0$, so besteht dieser Durchschnitt aus genau einem Punkt.

Bew.: Nehmen wir $\bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} K_n = \emptyset$ an, so ist $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n^c$ eine Überdeckung von K_0 mit offenen Mengen. Da K_0 kompakt ist, existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$K_0 \subset \bigcup_{n=1}^{N} K_n^c .$$

Daraus folgt

$$\emptyset = K_0 \setminus \bigcup_{n=1}^{N} K_n^c = K_0 \cap \Big(\bigcup_{n=1}^{N} K_n^c\Big)^c = \bigcap_{n=0}^{N} K_n = K_N .$$

Widerspruch! Bew. des Zusatzes: Sind $x \neq y$ beide $\in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$, so ist für alle $n \in \mathbb{N}$ $\operatorname{diam}(K_n) \geq d(x,y) > 0$ und damit $\liminf_{n\to\infty} \operatorname{diam}(K_n) \geq d(x,y) > 0$. $\square$

Jede kompakte Teilmenge eines metrischen Raumes ist beschränkt und abgeschlossen. Im $\mathbb{R}^n$ (und damit auch im $\mathbb{C}$) gilt auch die Umkehrung. Das ist der

<u>Satz von Heine-Borel:</u> $K \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn K beschränkt und abgeschlossen ist. (1C

(Vgl. Ana II, Abschnitt 1.5, Sätze 1 und 2)

1.4.2 Kompaktifizierung nach Alexandroff

Für manche Betrachtungen erweist es sich als zweckmäßig, den topologischen Raum $(\mathbb{C}, \tau)$ zu kompaktifizieren, indem man einen zusätzlichen ("unendlich fernen") Punkt hinzunimmt, den man mit "∞" bezeichnet.

Def.: $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ heißt die <u>abgeschlossene komplexe Ebene</u>. Hierauf wird durch

$$\hat{d}(z,w) := \begin{cases} \dfrac{2|z-w|}{(1+|z|^2)^{1/2}(1+|w|^2)^{1/2}} & z, w \in \mathbb{C} \\ \dfrac{2}{(1+|z|^2)^{1/2}} & z \in \mathbb{C},\ w = \infty \\ \dfrac{2}{(1+|w|^2)^{1/2}} & z = \infty,\ w \in \mathbb{C} \\ 0 & z = w = \infty \end{cases}$$

eine Abstandsfunktion $\hat{d}: \hat{\mathbb{C}} \times \hat{\mathbb{C}} \to [0,\infty)$ definiert.

Bem.: (1) $\hat{d}$ ist eine Metrik. Die Δ's-Ungleichung ist "zu Fuß" etwas mühsam nachzurechnen. Wir werden das im Abschnitt über winkeltreue Abbildungen (etwas eleganter) nachholen.

(2) Der metrische Raum $(\hat{\mathbb{C}}, \hat{d})$ ist kompakt und daher vollständig.

(3) Die von $\hat{d}$ erzeugte Topologie hat die Gestalt $\hat{\tau} = \tau \cup \tau_\infty$, wobei τ das übliche System offener Teilmengen von $\mathbb{C}$ ist. τ_∞ besteht aus allen Teilmengen $\Omega \subset \hat{\mathbb{C}}$ mit den Eigenschaften:

(i) $\Omega \setminus \{\infty\} \in \tau$ und

(ii) Es gibt eine kompakte Teilmenge K von $(\mathbb{C}, |\cdot|)$, so dass $\mathbb{C} \setminus K \subset \Omega$.

(Die Menge $\mathbb{C} \setminus K$ wird als offene Umgebung von ∞ bezeichnet.)

(4) $(\hat{\mathbb{C}}, \hat{d})$ wird auch als "Riemannsche Zahlensphäre" bezeichnet. (Vgl. Abschnitt über winkelerhaltende Abb.)

1.4.3 Wegzusammenhang

Vielfach werden wir für den Definitionsbereich $\Omega \subset \mathbb{C}$ einer Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ nicht nur die Offenheit voraussetzen, sondern auch, dass Ω zusammenhängend bzw. wegzusammenhängend ist. Dazu die

Def.: Sei (X, d) ein metrischer Raum und $M \subset X$ eine Teilmenge. Dann heißt M

(1) <u>wegzusammenhängend</u>, wenn zu je zwei Punkten $x_1, x_2 \in M$ ein stetiger Weg $\gamma : [0,1] \to M$ existiert so dass $\gamma(0) = x_1$ und $\gamma(1) = x_2$;

(2) ein <u>Gebiet</u>, wenn M offen und wegzusammenhängend ist.

<u>Bem.</u>: Ist (X,d) metrisch und $M \subset X$, so heißt M zusammenhängend (ohne die Vorsilbe weg-), wenn gilt: Im metrischen Raum (M,d) sind nur die Teilmengen M und $\emptyset$ sowohl offen als auch abgeschlossen.

Es gilt: M ist wegzusammenhängend
$\implies M$ ist zusammenhängend

(denn: Sei $\emptyset \subsetneqq M_1 \subsetneqq M$, M_1 offen und abgeschlossen in (M,d) und M wegzusammenhängend. Dann gibt es $x_1 \in M_1$ und $x_2 \in M_2 := M \setminus M_1$ und einen stetigen Weg $\gamma : [0,1] \to M$ mit $\gamma(0) = x_1$ und $\gamma(1) = x_2$. Setzt man $t^* := \sup\{t \in [0,1] : \gamma(t) \in M_1\}$, so ist $\gamma(t^*)$ ein Randpunkt von M_1 im Widerspruch zu $\partial M_1 = \overline{M}_1 \setminus \mathring{M}_1 = \emptyset$.)

Im Allgemeinen ist "wegzusammenhängend" eine echt stärkere Eigenschaft als "zusammenhängend", so ist z.B. die Menge

$$M := \{(0,0)\} \cup \{(x, \cos(\tfrac{1}{x})) : x > 0\} \subset \mathbb{R}^2$$

zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend (warum?). Für die Definition des Begriffs "Gebiet" ist dieser Unterschied jedoch unerheblich, denn jede offene Menge, die zusammenhängend ist, ist auch wegzusammenhängend (vgl. Kaballo, Band II, Thm. 8.12).