2. Komplexe Funktionen, Funktionenfolgen und -Reihen

Wir betrachten Funktionen

$$f = g + ih : \mathbb{C} \supset \Omega \to \mathbb{C},$$

zunächst ohne zusätzliche Voraussetzungen an den Definitionsbereich Ω.

2.1 Stetigkeit

Die Begriffe "Stetigkeit" und "gleichmäßige Stetigkeit" werden in der Analysis II allgemein für Funktionen zwischen metrischen Räumen eingeführt. An die wichtigsten Tatsachen sei kurz erinnert, dabei sind die Formulierungen an die obige Situation angepasst.

Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ heißt stetig in $z_0 \in \Omega$, wenn: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall z \in \Omega$ mit $|z - z_0| < \delta : |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

Äquivalent dazu sind:

(1) $\forall$ Folgen $(z_n)_n$ in Ω mit $\lim_{n \to \infty} z_n = z_0$ gilt $\lim_{n \to \infty} f(z_n) = f(z_0)$ (Folgenstetigkeit);

(2) zu jeder ~~$\forall$~~ Umgebung ~~en~~ V von $f(z_0)$ gibt es eine Umgebung U von z_0 mit $f(U) \subset V$.

Hinreichend für die Stetigkeit von f in z_0 ist eine

Hölder-Bedingung:

$\exists\ \varepsilon>0, L>0, \alpha\in(0,1]\ \forall z\in B_\varepsilon(z_0):\ |f(z)-f(z_0)|\leq L|z-z_0|^\alpha$

Für $\alpha=1$ spricht man von einer Lipschitz-Bed.

$f:\Omega\to\mathbb{C}$ heißt stetig in Ω, wenn f in jedem $z_0\in\Omega$ stetig ist. Das ist genau dann der Fall, wenn für jede offene Menge $V\subset\mathbb{C}$ das Urbild $f^{-1}(V)$ offen relativ Ω ist (d.h. wenn $f^{-1}(V)=\Omega\cap U$ ist für eine offene Menge $U\subset\mathbb{C}$).

$f:\Omega\to\mathbb{C}$ heißt gleichmäßig stetig, wenn gilt:

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall z,w\in\Omega$ mit $|z-w|<\delta:\ |f(z)-f(w)|<\varepsilon$.

Auch hierfür gibt es ein äquivalentes Folgenkriterium; Es lautet:

Für alle Paare $(z_n)_n, (w_n)_n$ von Folgen in Ω mit $\lim\limits_{n\to\infty} z_n-w_n=0$ ist auch $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)-f(w_n)=0$.

Hölder-stetige Funktionen ($|f(z)-f(w)|\leq L|z-w|^\alpha$ $\forall z,w\in\Omega$) sind gleichmäßig stetig.

Gleichmäßig stetige Funktionen bilden Cauchy-Folgen auf Cauchy-Folgen ab. (Gilt nicht ohne Glm.-Vor., Bsp.: $f:\mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C},\ z\mapsto f(z)=\frac{1}{z}$!)

(spezifische) Beispiele: (1) Die Abbildungen

$z \mapsto \bar{z}$, $z \mapsto \operatorname{Re} z$, $z \mapsto \operatorname{Im} z$, $z \mapsto |z|$, $z \mapsto az+b$ ($a, b \in \mathbb{C}$ fest)

sind auf $\mathbb{C}$ Lipschitz- und also gleichmäßig stetig.

(2) Aufgrund des Folgenkriteriums und der Rechenregeln für Grenzwerte sind mit f_1 und f_2 auch (sofern definiert) $\alpha f_1 + \beta f_2$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ fest), $f_1 \circ f_2$, $f_1 \cdot f_2$ und $\frac{f_1}{f_2}$ stetig. Insbesondere sind Polynome

$$P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto P(z, \bar{z}) := \sum_{k=0}^{N} \sum_{\ell=0}^{M} a_{k\ell} z^k \bar{z}^\ell \quad (a_{k,\ell} \in \mathbb{C} \text{ fest})$$

stetig (allerdings i. Allg. nicht glm. stetig).

Rationale Funktionen

$$R : \mathbb{C} \setminus N \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto R(z) := \frac{P(z, \bar{z})}{Q(z, \bar{z})}$$

sind stetig in ihrem Definitionsbereich $\mathbb{C} \setminus N$. Dabei sind P und Q Polynome und N die Nullstellenmenge von Q.

Aus Analysis II wissen wir

Satz 1: Es sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt und $f : K \to \mathbb{C}$ stetig. Dann gelten

(1) f ist gleichmäßig stetig;

(2) $f(K)$ ist kompakt;

(3) $|f|: K \to \mathbb{R}$, $z \mapsto |f(z)|$, nimmt ein Maximum und ein Minimum an. Ebenso die reellwertigen Fktn. $\operatorname{Re} f: z \mapsto \operatorname{Re} f(z)$ und $\operatorname{Im} f: z \mapsto \operatorname{Im} f(z)$.

(4) Gilt zudem $f(z) \neq 0 \; \forall z \in K$, so ist

$$\inf\{|f(z)| : z \in K\} = \min\{|f(z)| : z \in K\} > 0.$$

Als Übungsaufgabe sei der Beweis der beiden folgenden Aussagen gestellt:

(1) $f = g + ih : \mathbb{C} \supset \Omega \to \mathbb{C}$ ist genau dann stetig (bzw. gleichmäßig stetig), wenn $g: \Omega \to \mathbb{R}$ und $h: \Omega \to \mathbb{R}$ stetig (bzw. gleichmäßig stetig) sind.

(2) Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ zusammenhängend (bzw. wegzusammenhängend) und $f: \Omega \to \mathbb{C}$ stetig. Dann ist auch $f(\Omega)$ zusammenhängend (bzw. wegzusammenhängend).

2.2 Konvergenz von Funktionenfolgen

Für $n \in \mathbb{N}$ seien $f, f_n : \mathbb{C} \supset \Omega \to \mathbb{C}$ Funktionen mit gemeinsamem Definitionsbereich Ω.

In Analysis II haben wir zwischen punktweiser und gleichmäßiger Konvergenz einer Funktionenfolge $(f_n)_n$ unterscheiden. Die stärkere Eigenschaft der gleichmäßigen Konvergenz haben wir stets dann benötigt, wenn es darum ging, analytische Eigenschaften der f_n (z. B. Stetigkeit, Integrierbarkeit u.ä.) auf die Grenzfunktion zu vererben. Dieses Ziel lässt sich oft auch mit einer schwächeren Form der Konvergenz erreichen. Man unterscheidet die folgenden Konvergenzbegriffe:

Def.: Für $n \in \mathbb{N}$ seien $f, f_n : \mathbb{C} \supset \Omega \to \mathbb{C}$ Funktionen. Die Folge $(f_n)_n$ heißt

(a) gleichmäßig konvergent gegen f, wenn

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{z \in \Omega} |f_n(z) - f(z)| = 0 \ ;$$

(b) lokal gleichmäßig konvergent gegen f, wenn zu jedem $z \in \Omega$ eine Umgebung $U(z)$ existiert, auf der $(f_n)_n$ gleichmäßig gegen f konvergiert;

(c) kompakt konvergent gegen f, wenn (f_n) auf jedem kompakten $K \subset \Omega$ gleichmäßig gegen f konvergiert;

(d) punktweise konvergent gegen f, wenn für alle $z \in \Omega$ gilt $\lim_{n \to \infty} f_n(z) = f(z)$.

Bem.: (1) Zur Abkürzung werden wir zukünftig $\sup_{z\in M}|f(z)| = \|f\|_M$ schreiben. Dann lautet z.B. der Konvergenzbegriff in (c): ..., wenn für jedes Kompaktum $K\subset\Omega$ gilt: $\lim_{n\to\infty}\|f-f_n\|_K = 0$.

(2) Es gelten die Implikationen (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (d). Hierbei bedarf nur der Schluss (b) $\Rightarrow$ (c) der Begründung. Sei also $f_n\to f$ mit lokal gleichmäßiger Konvergenz und $K\subset\Omega$ kompakt. Dann gibt es zu jedem $z\in K$ eine offene Umgebung $U(z)$, so dass $\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|_{U(z)}=0$, und mit $K\subset\bigcup_{z\in K}U(z)$ ist eine offene Überdeckung von K gegeben. Da K kompakt ist, gibt es $z_1,\dots,z_N\in K$, so dass bereits $K\subset\bigcup_{j=1}^{N}U(z_j)$, und es gilt

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|_K \le \lim_{n\to\infty}\max_{j=1}^{N}\|f_n-f\|_{U(z_j)} = 0.$$

(3) Ein metrischer Raum (X,d) heißt lokal kompakt, wenn jedes $x\in X$ eine kompakte Umgebung besitzt. Z.B. ist für jede offene Teilmenge $\Omega\subset\mathbb{C}$ der metrische Raum $(\Omega,|\cdot|)$ lokal kompakt. In diesem Fall gilt auch (c) $\Rightarrow$ (b), also die Übereinstimmung von lokal gleichmäßiger und kompakter Konvergenz. (Man benutzt dann bevorzugt den kürzeren Begriff der kompakten Konvergenz.)

(4) Ist $(f_n)_n$ eine Folge stetiger Funktionen $f_n: \Omega \to \mathbb{C}$,

die lokal gleichmäßig gegen $f: \Omega \to \mathbb{C}$ konvergiert, so ist auch f stetig. Denn zu jedem $z \in \Omega$ gibt es eine Umgebung U von z, so dass $f_n|_U \to f|_U$ mit gleichmässiger Konvergenz, so dass $f|_U$ stetig und insbesondere f in z stetig ist. Da dies für alle $z \in \Omega$ gilt, ist f stetig.

Vorsicht: Gleichmässige Stetigkeit bleibt unter lokal gleichmässiger Konvergenz i. Allg. nicht erhalten, wie das Bsp.

$$f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{R}, \quad z \longmapsto f_n(z) := \min(n, |z|^2)$$

zeigt.

2.3 Funktionenreihen

Eine Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ (oder $\sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k$)

heißt punktweise, kompakt, usw. konvergent, wenn dies auf die Folge $S_N = \sum_{n=1}^{N} f_n$ (bzw. $S_N = \sum_{|k|\leq N} f_k$) der Partialsummen zutrifft. In diesem Zusammenhang sei erinnert an das

Konvergenzkriterium von Weierstraß: Ist $(f_n)_n$ eine Folge von Funktionen $f_n : M \to \mathbb{C}$, so dass

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_M < \infty,$$

so konvergiert $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ auf M absolut und gleichmäßig gegen eine Funktion $f : M \to \mathbb{C}$.

(Ana II, Abschnitt 1.4, Satz 3)

Hierbei kann $\sum_{n \in \mathbb{N}}$ durch $\sum_{k \in \mathbb{Z}}$ ersetzt werden. Das Kriterium ist geeignet zum Nachweis gleichmäßiger, lokal gleichmäßiger und kompakter Konvergenz: Man wähle $M = \Omega$, $M = U(z)$ bzw. $M = K$. Eng verknüpft mit dem Weierstraß-Kriterium ist der folgende, nur für Funktionen<u>reihen</u> definierte Konvergenzbegriff:

Def.: Eine Reihe $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ von Funktionen $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ heißt <u>normal konvergent</u>, wenn zu jedem $z \in \Omega$ eine Umgebung U von z existiert, so dass

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_U < \infty.$$

Bem.: (1) Normale Konvergenz impliziert nach Weierstraß die lokal gleichmäßige Konvergenz der Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$.

(2) Ist $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ normal konvergent, so gilt $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_K < \infty$ für jedes kompakte $K \subset \Omega$.

(3) Ist $\Omega \subset \mathbb{C}$ lokal kompakt (z.B. offen), so ist $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ normal konvergent g.d.w. für jedes kompakte $K \subset \Omega$ gilt $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_K < \infty$.

(4) Vorsicht: Manche Autoren (z.B. Kaballo) verstehen unter normaler Konvergenz, dass

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_\Omega < \infty .$$

Bsp.: (1) Potenzreihen $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$.

Ist $R := \sup\{r>0 : \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n < \infty\}$ der Konvergenzradius von P, so konvergiert $P(z)$ absolut für alle $z \in B_R(z_0)$ und divergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-z_0| > R$. Der Konvergenzradius kann nach der Formel von Cauchy-Hadamard berechnet werden, es gilt

$$R = \left(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\right)^{-1}.$$

(Sowieso Ana I, jetzt der Bezug zu den neuen Konvergenzbegriffen:)

Eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R>0$ ist auf $B_R(z_0)$ normal und damit kompakt konvergent, denn:

Ist $z\in B_R(z_0)$, so existiert $r\in(|z-z_0|,R)$, und $U=B_r(z_0)$ ist eine offene Umgebung von z. Hierfür gilt mit $f_n(w)=a_n(w-z_0)^n$, dass $\|f_n\|_U=|a_n|r^n$, also

$$\sum_{n=0}^{\infty}\|f_n\|_U=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|r^n<\infty.$$

(Im Allgemeinen ist die Konvergenz nicht gleichmässig, wie das Bsp. der geometrischen Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\frac{1}{1-z}$ zeigt. Hierfür ist

$$\sup_{|z|<1}\left|\sum_{k=n}^{\infty}z^k\right|=\sup_{|z|<1}\frac{|z|^n}{|1-z|}=\infty.)$$

Da die Partialsummen einer Potenzreihe Polynome und also stetig sind, folgt aus diesen Überlegungen, dass auch $P: B_R(z_0)\to\mathbb{C},\ z\mapsto P(z)$ stetig ist.

(2) Unser zweites Bsp. ist eine trigonometrische Reihe; sie können wir auch als eine Potenzreihe auf dem Rand ihres Konvergenzkreises auffassen: Es sei $(a_n)_n$ eine monoton fallende Nullfolge reeller Zahlen, so dass $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\infty$. Für $x\in(0,2\pi)$ konvergiert nach dem verallgemeinerten Leibnizkriterium (Ana I, Abschnitt 3.1, Satz 5) die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_ne^{inx},$$

darüber hinaus liefert dieses Kriterium für den Reihenrest die Abschätzung

$$\left|\sum_{n=m}^{\infty} a_n e^{inx}\right| \leq \frac{2a_m}{|1-e^{ix}|} = \frac{a_m}{|\sin(\frac{x}{2})|}.$$

Für $0<\delta<\pi$ erhalten wir

$$\sup_{x\in[\delta,2\pi-\delta]} \left|\sum_{n=m}^{\infty} a_n e^{inx}\right| \leq \frac{a_m}{|\sin(\frac{\delta}{2})|} \longrightarrow 0 \quad (m\to\infty)$$

und damit die kompakte (hier: = lokal glm.) Konvergenz dieser Funktionenreihe. Nach Bem. (4) am Ende von Abschnitt 2.2 ist die Grenzfunktion stetig auf $(0,2\pi)$, was „mit bloßem Auge" allein wegen der Unbestimmtheit der Folge $(a_n)_n$ nicht erkennbar ist. Die Konvergenz der Reihe ist

- nicht normal, denn für jede Menge $\emptyset \neq M \subset (0,2\pi)$ ist $\sup_{x\in M} |a_n e^{inx}| = a_n$ und nach Voraussetzung gilt $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = \infty$. – Die Konvergenz ist auch
- auf $(0,2\pi)$ nicht gleichmäßig. Hieraus würde

$$\lim_{n,m\to} \sup_{x\in(0,2\pi)} \left|\sum_{k=m}^{n} a_k e^{ikx}\right| = 0$$

folgen, ein Widerspruch zu

$$\sup_{x\in(0,2\pi)} \left|\sum_{k=m}^{n} a_k e^{ikx}\right| \geq \lim_{x\to 0} \left|\sum_{k=m}^{n} a_k e^{ikx}\right| \geq \sum_{k=m}^{n} a_k$$

(letzteres bleibt z.B. ≥ 1, wenn nur $n=n(m)$ hinreichend groß gewählt wird).

2.4 Die Exponentialfunktion im Komplexen

Hier möchte ich mit geringfügigen Ergänzungen rekapitulieren, was in Ana I, Abschnitt 3.4, zu diesem Thema festgestellt worden ist.

Def.: Die Abbildung

$$\exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \exp(z) := e^z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

heißt Exponentialfunktion.

Bem.: (1) Wegen $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k!} = \infty$ ist der Konvergenzradius der definierenden Potenzreihe $R = \infty$.

(2) Mit Hilfe der Exponentialfunktion haben wir die trigonometrischen Funktionen

$$\cos: \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \; z \mapsto \cos(z) := \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!},$$

$$\sin: \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \; z \mapsto \sin(z) := \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

und die Hyperbelfunktionen

$$\cosh: \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \; z \mapsto \cosh(z) := \frac{1}{2}(e^{z} + e^{-z}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!},$$

$$\sinh: \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \; z \mapsto \sinh(z) := \frac{1}{2}(e^{z} - e^{-z}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

definiert. Alle genannten Reihendarstellungen konvergieren auf ganz $\mathbb{C}$ normal und also auch absolut und kompakt.

<u>Satz</u>: Für $P \in \{\exp, \cos, \sin\}$ gelten

(1) $P(\bar{z}) = \overline{P(z)}$, (2) $e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z)$ (Euler)

(3) $\exp(0) = 1$, $\exp(i\frac{\pi}{2}) = i$, $\exp(i\pi) = -1$, $\exp(z+2\pi i) = \exp(z)$

$\cos(0) = 1$, $\cos(\frac{\pi}{2}) \overset{\text{Def.!}}{=} 0$, $\cos(z+\pi) = -\cos(z)$, $\cos(z+2\pi) = \cos(z)$

$\sin(0) = 0$, $\sin(z+\frac{\pi}{2}) = \cos(z)$, $\sin(z+\pi) = -\sin(z)$, $\sin(z+2\pi) = \sin(z)$

(exp ist $2\pi i$-periodisch, cos und sin sind 2π-periodisch und kürzere Perioden gibt es nicht.)

(4) Funktionalgleichungen:

$\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$, insbes. $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$,

$\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$,

$\sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$.

(5) Nullstellen: Mit $N_P = \{z \in \mathbb{C} : P(z) = 0\}$ sind

$N_{\exp} = \emptyset$, $N_{\cos} = \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, $N_{\sin} = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

(6) Polarkoordinatendarstellung komplexer Zahlen:

Zu jedem $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ existiert $\varphi \in \mathbb{R}$, so dass mit $r := |z|$ gilt: $z = re^{i\varphi}$. Schreibt man für ein $a \in \mathbb{R}$ vor, dass $\varphi \in [a, a+2\pi)$, so ist φ eindeutig bestimmt.

Bem.: Aussagen über cosh und sinh erhält man aus obigen mit Hilfe von

$\cosh(z) = \frac{1}{2}(e^{-i(iz)} + e^{i(iz)}) = \cosh(iz)$ und

$\sinh(z) = \frac{1}{2}(e^{-i(iz)} - e^{i(iz)}) = \frac{1}{i}\sin(iz)$.

Folgerungen aus (6):

(6.1) Für jedes $a \in \mathbb{R}$ ist die Einschränkung

$$\exp|_{S_a} : S_a := \{x+iy \in \mathbb{C} : a \leq y < a+2\pi\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

von exp auf den horizontalen Streifen S_a der Breite 2π eine Bijektion[1]. Es gibt daher unendlich viele Möglichkeiten, auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ eine Umkehrfunktion der Exponentialfunktion zu definieren. (Mehr dazu später!)

(6.2) n-te Einheitswurzeln: Für $n \in \mathbb{N}$ hat die Gleichung $z^n = 1$ in $\mathbb{C}$ genau n Lösungen, nämlich die Zahlen $z_k = \exp(\frac{k}{n} \cdot 2\pi i)$, $k \in \{0, \dots, n-1\}$.

(Die z_k sind die Ecken eines regulären n-Ecks, das dem Einheitskreis einbeschrieben ist.)

(6.3) Zu $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ existieren genau n Zahlen $w_0, \dots, w_{n-1}$ mit $w_k^{\,n} = z$.

(Denn: Ist $z = re^{i\varphi}$, so sind $w_k = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{\varphi}{n}} \cdot z_k$ mit den Einheitswurzeln z_k aus (6.2) n verschiedene Lösungen. Ist u eine weitere Lösung, so folgt $\left(\frac{u}{w_0}\right)^n = \frac{z}{z} = 1$, also $u = w_0 \cdot z_k$ mit einer der Einheitswurzeln z_k.)

---

1) Man kann auch $S_a = \{x+iy \in \mathbb{C} : a < y \leq a+2\pi\}$ wählen.