3. Komplexe Differenzierbarkeit

In diesem Abschnitt sei stets $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f = g + ih : \Omega \to \mathbb{C}$ mit reellwertigen Funktionen g, h.

3.1 Definitionen, äquivalente Formulierungen und einfache Folgerungen

Zuerst noch einmal die

Def.: $f : \Omega \to \mathbb{C}$ heißt

(a) komplex differenzierbar in $z_0 \in \Omega$, wenn der Grenzwert $f'(z_0) := \lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{h}(f(z_0+h) - f(z_0))$ existiert;

(b) holomorph in Ω, wenn f in jedem Punkt $z_0 \in \Omega$ komplex differenzierbar ist;

(c) holomorph in $z_0 \in \Omega$, wenn es eine Umgebung $U(z_0) \subset \Omega$ von z_0 gibt, so dass $f|_{U(z_0)}$ holomorph ist.

Bem. + Bsp.: (1) Im $\lim\limits_{h \to 0} \ldots$ in (a) sind alle Nullfolgen $(h_n)_n$ in $\mathbb{C}$ mit $h_n + z_0 \in \Omega$ für alle $n \in \mathbb{N}$ zugelassen.

(2) $f'(z_0)$ heißt die Ableitung von f in $z_0 \in \Omega$.

(3) Der $\mathbb{C}$-Vektorraum aller holomorphen Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{C}$ wird mit $\mathcal{O}(\Omega)$ bezeichnet.

(4) Wie im Reellen gilt: Da konvergente Folgen beschränkt sind, impliziert komplexe Differenzierbarkeit die Stetigkeit von f in z_0.

(5) Ist f konstant, so ist $f'(z)=0 \ \forall z\in\Omega$.

(6) Der Grenzwert $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\overline{h}}{h}$ existiert nicht. Z.B. haben wir für $h_n=\frac{i^n}{n}$, dass $\frac{\overline{h_n}}{h_n}=(-1)^n$. Das hat zur Folge, dass

(i) die Funktion $f(z)=\overline{z}$ in keinem $z\in\mathbb{C}$ komplex diff'bar ist, denn es gilt

$$\frac{1}{h}\left(f(z+h)-f(z)\right)=\frac{1}{h}\left(\overline{z}+\overline{h}-\overline{z}\right)=\frac{\overline{h}}{h};$$

(ii) die Funktion $f(z)=z\cdot\overline{z}=|z|^2$ nur in $z=0$ komplex differenzierbar ist, denn wir haben

$$\frac{1}{h}\left(f(z+h)-f(z)\right)=\frac{1}{h}\left((z+h)(\overline{z}+\overline{h})-z\overline{z}\right)$$
$$=\frac{1}{h}\left(z\cdot\overline{h}+\overline{z}\cdot h+h\overline{h}\right)=z\cdot\frac{\overline{h}}{h}+\overline{z}+\overline{h}.$$

Bsp. (ii) zeigt auch, dass Holomorphie in einem Punkt eine stärkere Eigenschaft als komplexe D'barkeit in diesem Punkt.

(7) Die Menge $\{z\in\mathbb{C} : f \text{ ist holomorph in } z\}$ ist stets offen.

Differenzierbarkeit bedeutet Approximierbarkeit durch eine affin-lineare Abbildung. Für die komplexe Differenzierbarkeit muss der lineare Anteil der approximierenden Abbildung $\mathbb{C}$-linear sein. Genauer:

Lemma 1: Für $f: \Omega \to \mathbb{C}$ und $z_0 \in \Omega$ sind äquivalent:

(1) f ist in $z_0 \in \Omega$ komplex differenzierbar.

(2) Es gibt eine Zahl $\gamma \in \mathbb{C}$ und eine Funktion $\varphi: B_\varepsilon(0) \to \mathbb{C}$ mit $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\varphi(h)}{h} = 0$, so dass

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + \gamma \cdot h + \varphi(h).$$

(3) Es gibt eine in z_0 stetige Funktion $\Delta: B_\varepsilon(z_0) \to \mathbb{C}$, so dass $f(z_0 + h) = f(z_0) + \Delta(z_0 + h) \cdot h$.

Bew.: (1) $\Rightarrow$ (2): Wir wählen $\gamma = f'(z_0)$ und $\varphi(h) = f(z_0 + h) - f(z_0) - \gamma \cdot z_0$. Dann gilt

$$\lim_{h \to 0} \frac{\varphi(h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(f(z_0 + h) - f(z_0)) - f'(z_0) = 0.$$

(2) $\Rightarrow$ (3) Wähle $\Delta(z_0 + h) := \begin{cases} \gamma & \text{für } h = 0 \\ \frac{\varphi(h)}{h} + \gamma & \text{für } h \neq 0 \end{cases}$.

Dann ist Δ stetig in z_0 und es gilt

$$f(z_0 + h) - f(z_0) = \gamma \cdot h + \varphi(h) = \Delta(z_0 + h) \cdot h.$$

(3) $\Rightarrow$ (1). Für $h \neq 0$ ist $\frac{1}{h}(f(z_0+h)-f(z_0)) = \Delta(z_0+h)$.

Da Δ in z_0 als stetig vorausgesetzt ist, folgt

$$\Delta(z_0) = \lim_{h\to 0} \Delta(z_0+h) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(f(z_0+h)-f(z_0)) \; (= f'(z_0)).$$

$\square$

Da wir komplexe Differenzierbarkeit genau wie im Reellen als Existenz des Grenzwerts der Differenzenquotienten definiert haben, behalten die Beweise der Ableitungsregeln ihre Gültigkeit. Ohne erneuten Beweis können wir festhalten:

Lemma 2: Es seien $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ und f_1, f_2 sowie f_3 in $z \in \mathbb{C}$ komplex diff'bar und $f_3(z) \neq 0$. Dann sind auch $\alpha f_1 + \beta f_2$, $f_1 \cdot f_2$ und $\frac{f_1}{f_3}$ in z komplex diff'bar, und es gelten

(1) $(\alpha f_1 + \beta f_2)'(z) = \alpha f_1'(z) + \beta f_2'(z)$,

(2) $(f_1 f_2)'(z) = f_1'(z) f_2(z) + f_1(z) f_2'(z)$,

(3) $\left(\frac{f_1}{f_3}\right)'(z) = \frac{1}{f_3(z)^2}\left(f_1'(z) f_3(z) - f_1(z) f_3'(z)\right)$.

Ebenso verzichtbar ist ein erneuter Beweis der Kettenregel:

Lemma 3: Sind f_1 in z_0 und f_2 in $f_1(z_0)$ komplex diff'bar, so ist $f_2 \circ f_1$ in z_0 komplex diff'bar und es gilt

$$(f_2 \circ f_1)'(z_0) = f_2'(f_1(z_0)) \cdot f_1'(z_0).$$

Für die Ableitung der Umkehrfunktion gilt:

Satz 1: $f : \Omega \to f(\Omega)$ sei holomorph und bijektiv, die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(\Omega) \to \Omega$ sei stetig und es gelte $f'(z) \neq 0 \quad \forall z \in \Omega$. Dann ist auch f^{-1} holomorph und

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))} \quad \forall w \in f(\Omega).$$

Bem.: Bijektionen wie in Satz 1, die in beide Richtungen holomorph sind, nennt man <u>biholomorph</u>.

Bew.: Es ist $f^{-1}(f(z)) = z$ und daher

$$\frac{1}{h}\left(f^{-1}(f(z+h)) - f^{-1}(f(z))\right) = \frac{1}{h}(z+h-z) = 1.$$

Hierin setzen wir $w = f(z)$, $w+k = f(z+h)$, so dass

$$k = w+k-w = f(z+h) - f(z).$$

Da f homöomorph (in beide Richtungen stetig) ist, gilt $h \to 0 \Leftrightarrow k \to 0$ und wir erhalten

$$1 = \frac{k}{h} \cdot \frac{1}{k} \cdot \left(f^{-1}(w+k) - f^{-1}(w)\right),$$

also

$$\frac{1}{\frac{f(z+h)-f(z)}{h}} = \frac{1}{\frac{k}{h}} = \frac{1}{k}\left(f^{-1}(w+k) - f^{-1}(w)\right).$$

Jetzt $k, h \to 0$. $\square$.

Bisher mangelt es völlig an Beispielen für holomorphe Funktionen. Diese liefert der folgende

Satz 2: Es sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Dann gelten:

(1) Die Funktion $P: B_R(z_0) \to \mathbb{C}$, $z \mapsto P(z)$ ist holomorph und es gilt $P'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n (z-z_0)^{n-1}$; der Konvergenzradius dieser Reihe ist ebenfalls R.

(2) Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist P k-mal komplex differenzierbar und es gilt

$$P^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (z-z_0)^{n-k}.$$

(3) Für alle $k \in \mathbb{N}$ ist $P^{(k)}(z_0) = k!\, a_k$.

Bew.: O.E. können wir $z_0 = 0$ annehmen.

Zu (1) klären wir zunächst die Aussage über den Konvergenzradius der abgeleiteten Reihe: Die folgt mit $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ und der Formel $\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ von Cauchy-Hadamard.

In derselben Weise werden wir in der folgenden Rechnung verwenden, dass $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n(n-1)}{2}} = 1$ ist, und der Faktor $\frac{n(n-1)}{2}$ also den Konvergenzradius nicht verkleinert. Nun seien

$$z, w \in B_R(0) \text{ und } |z|, |w| < r < R.$$

Dann ist

$$P(z) - P(w) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z^n - w^n) \quad \text{jetzt: geometrische } \Sigma\text{-Formel}$$

$$= (z-w) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k} w^k$$

und daher

$$\left| \frac{P(z)-P(w)}{z-w} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \cdot z^{n-1} \right| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k} (w^k - z^k) \right|$$

(Beiträge für $k=0$ und $n=1$ verschwinden!)

$$= \left| \sum_{n=2}^{\infty} a_n \cdot \sum_{k=1}^{n-1} z^{n-1-k} (w-z) \sum_{\ell=0}^{k-1} w^{k-1-\ell} z^\ell \right|$$

$$\leq |z-w| \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| r^{n-2} \sum_{k=1}^{n-1} k$$

Δ's-Ungl., $|z|, |w| < r$

$$= |z-w| \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2} \cdot |a_n| \cdot r^{n-2} = |z-w| \cdot C(r)$$

Hieraus folgt für $w \to z$:

$$P'(z) = \lim_{w \to z} \frac{P(z)-P(w)}{z-w} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \cdot z^{n-1}.$$

Damit ist (1) gezeigt. Wie im Reellen "darf" man also Potenzreihen gliedweise differenzieren. Wiederholt man das $(k-1)$-mal, erhält man (2). Hierin $z = z_0$ zu setzen, ergibt (3). $\square$

Bem.: (1) Polynome in z sind komplex differenzierbar. (Das sollten Sie in einer der ÜAen von Blatt 2 noch einmal für die Monome mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes nachrechnen.) Polynome in z und $\bar{z}$ sind nicht komplex d'bar, wie das einfache Bsp. $P(z,\bar{z})=\bar{z}$ zu Beginn bereits gezeigt hat.

(2) Die Exponentialfunktion $\exp: \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ ist holomorph mit $\exp' = \exp$.

(3) Die trigonometrischen und die Hyperbelfunktionen sind auf $\mathbb{C}$ holomorph und es gelten:

$$\sin' = \cos,\quad \cos' = -\sin,\quad \sinh' = \cosh,\quad \cosh' = \sinh.$$

(4) Funktionen wie in (2), (3), die auf der gesamten komplexen Ebene holomorph sind, nennt man "<u>ganze Funktionen</u>".

3.2 Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

Welcher Zusammenhang besteht zwischen komplexer und reeller Differenzierbarkeit (= totale D'barkeit im Sinne der Ana II)? Dazu identifizieren wir

$$f = g + ih : \mathbb{C}\supset\Omega\to\mathbb{C},\quad z = x+iy \longmapsto f(z)$$

mit

$$f = \begin{pmatrix} g\\ h\end{pmatrix} : \mathbb{R}^2\supset\Omega\to\mathbb{R}^2;\quad \begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}\longmapsto f(x,y).$$

Es gilt:

Satz 2: f (wie oben) ist genau dann in $z_0 \in \Omega$ komplex diff'bar, wenn f in z_0 reell diff'bar ist und den Cauchy-Riemannschen Dgln.

$$\frac{\partial g}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial h}{\partial y}(z_0) \quad \text{und} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial h}{\partial x}(z_0)$$

genügt. In diesem Fall ist

$$f'(z_0) = \frac{\partial g}{\partial x}(z_0) + i\,\frac{\partial h}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial h}{\partial y}(z_0) - \frac{\partial g}{\partial y}(z_0).$$

Bew.: f ist in z_0 komplex d'bar genau dann, wenn ein $\varepsilon > 0$ und eine Abbildung $\varphi : B_\varepsilon(0) \to \mathbb{C}$ mit $\lim\limits_{k\to 0} \frac{1}{k}\varphi(k) = 0$ existieren, so dass

$$f(z_0 + k) - f(z_0) = f'(z_0)k + \varphi(k).$$

In reeller Schreibweise, mit $f'(z_0) = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, also genau dann, wenn

$$\begin{pmatrix} g(x_0+k_1, y_0+k_2) \\ h(x_0+k_1, y_0+k_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(x_0, y_0) \\ h(x_0, y_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varphi_1(k) \\ \varphi_2(k) \end{pmatrix},$$

vgl. Abschnitt 1.2 über $\mathbb{C}$- bzw. $\mathbb{R}$-lineare Abb..

Das ist wiederum gleichbedeutend mit der reellen Diffbarkeit von f in $\binom{x_0}{y_0}$ und der Zusatzbedingung

$$Df(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial h}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial h}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

mit $\alpha = \operatorname{Re} f'(z_0)$ und $\beta = \operatorname{Im} f'(z_0)$.

Aus der komplexen Diff'barkeit folgt also die reelle Diff'barkeit in z_0 und die Cauchy-Riemann-Dglen.

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial h}{\partial y}(x_0,y_0) \quad \text{und} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial h}{\partial y}(x_0,y_0).$$

Umgekehrt: Ist f in (x_0,y_0) reell diff'bar und sind diese Gleichungen erfüllt, so hat die Jacobi-Matrix von f die Gestalt

$$Df(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix},$$

(mit $\alpha = \frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)$ und $\beta = \frac{\partial h}{\partial x}(x_0,y_0)$) wie es für die komplexe Diff'barkeit hinreichend ist.

In diesem Fall gilt

$$f'(z_0) = \alpha + i\beta = \frac{\partial g}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial h}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial h}{\partial y}(z_0) - \frac{\partial g}{\partial y}(z_0). \quad \square$$

Folgerung: Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f: G \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f'(z) = 0$ für alle $z \in G$, so ist f konst.

Bew.: Mit dem Zusatz zu Satz 2 folgt aus den Voraussetzungen, dass $\nabla g(z) = (0,0)$ und $\nabla h(z) = (0,0)$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Wenn G konvex ist, wissen wir aufgrund des MWSes (Ana II), dass g und h und somit auch f konstant sind. Das gilt insbesondere für Kreisscheiben.

Nun seien $z_0, z_1 \in G$ und $\gamma : [0,1] \to G$ ein stetiger Weg mit $\gamma(0) = z_0$ und $\gamma(1) = z_1$. Da G offen ist, gibt es zu jedem $t \in [0,1]$ ein $\varepsilon_t > 0$, so dass

$$B_{\varepsilon_t}(\gamma(t)) \subset G \quad \text{und} \quad \gamma([0,1]) \subset \bigcup_{t\in[0,1]} B_{\varepsilon_t}(\gamma(t)) \subset G.$$

Da $\gamma([0,1])$ kompakt ist, ist $\gamma([0,1])$ bereits in endlich vielen dieser Kreisscheiben enthalten, die sich überschneiden und auf denen f konstant ist. Folglich ist $f(z_0) = f(z_1)$. Hierbei waren $z_0, z_1 \in G$ beliebig, also ist f auf G konstant.

3.3 Wirtinger-Ableitungen und antiholomorphe Funktionen

Die definierende Gleichung für die reelle Diff'barkeit von $f = g + ih : \Omega \to \mathbb{C}$ in $z_0 = x_0 + iy_0$, das ist

$$\begin{pmatrix} g(z_0+k) - g(z_0) \\ h(z_0+k) - h(z_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial g}{\partial y}(z_0) \\ \frac{\partial h}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial h}{\partial y}(z_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varphi_1(k) \\ \varphi_2(k) \end{pmatrix}$$

mit $k = k_1 + ik_2 \in B_\varepsilon(0) \subset \mathbb{C}$, kann man ebenfalls in komplexer Schreibweise darstellen, indem man den linearen Teil in der Form

$$\alpha(z_0) \cdot k + \beta(z_0) \cdot \overline{k}$$

mit $\alpha(z_0), \beta(z_0) \in \mathbb{C}$ ansetzt. Für die Umrechnung kürzen wir $\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)=f_x$, $\frac{\partial g}{\partial x}(z_0)=g_x$ usw. ab. Dann ist

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial g}{\partial y}(z_0) \\ \frac{\partial h}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial h}{\partial y}(z_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_x & g_y \\ h_x & h_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(k+\bar{k}) \\ \frac{1}{2i}(k-\bar{k}) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\Big(g_x(k+\bar{k}) - i g_y (k-\bar{k}) + i h_x (k+\bar{k}) + \overset{1=-(-i)}{h_y} (k-\bar{k}) \Big)$$

$$= \frac{1}{2}\Big(f_x(k+\bar{k}) - i f_y (k-\bar{k}) \Big)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\Big) f(z_0)}_{\alpha(z_0)} \cdot k + \underbrace{\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\Big) f(z_0)}_{\beta(z_0)} \bar{k}$$

Die hier auftretenden gemischten Ableitungen 1. Ordnung werden als Wirtinger-Ableitungen bezeichnet.

Def.: Für eine reell differenzierbare Funktion $f:\Omega\to\mathbb{C}$ und $z_0\in\Omega$ heißen die komplexen Zahlen

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) := \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) - i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\Big) \quad \text{und}$$
$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) := \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\Big)$$

die Wirtinger-Ableitungen von f in $z_0\in\Omega$. Entsprechend nennt man die Funktionen

$$f_z := \frac{\partial f}{\partial z}:\Omega\longrightarrow\mathbb{C} \quad \text{und} \quad f_{\bar{z}} := \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}:\Omega\longrightarrow\mathbb{C}$$

die <u>Wirtinger-Ableitungen</u> von f.

Mit der obigen Herleitung haben wir gezeigt:

Satz 3: Eine Funktion $f: \Omega \to \mathbb{C}$ ist reell differenzierbar in $z_0 \in \Omega$, wenn es komplexe Zahlen $\frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$ und $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)$ und eine Abbildung $\varphi: B_\varepsilon(0) \to \mathbb{C}$ mit $\lim_{h\to 0} \frac{\varphi(h)}{h} = 0$ gibt, so dass

$$f(z_0+h) - f(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)\, h + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) \cdot \bar{h} + \varphi(h).$$

Eine reell differenzierbare Funktion $f: \Omega \to \mathbb{C}$ ist in $z_0 \in \Omega$ genau dann komplex diff'bar, wenn

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0.$$

In diesem Fall ist $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$.

Bem.: (1) Der 2. Teil des Satzes ergibt sich aus der oben gemachten Feststellung, dass $\lim_{h\to 0} \frac{\bar{h}}{h}$ nicht existiert. (Teilt man durch h, existiert $\lim_{h\to 0}$ beider Seiten genau dann, wenn $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$ ist.)

(2) Die Cauchy-Riemannschen Dglen. nehmen in dieser komplexen Schreibweise die elegante Form $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = 0$ an. Das muss man nicht nachrechnen, sondern folgt aus dem Vergleich der Sätze 2 und 3.

Bez.: Für $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{N}_0$ ist

$C^k(\Omega, \Omega') := \{f : \Omega \to \Omega' : f$ ist k-mal stetig diff'bar$\}$

und $C^k(\Omega) := C^k(\Omega, \mathbb{R})$.

Im nächsten Satz werden einige Rechenregeln für die Wirtinger-Ableitungen zusammengestellt.

Satz 4: Es seien $f : \Omega \to \mathbb{C}$ reell differenzierbar (in Regel (5): $f \in C^2(\Omega, \mathbb{C})$) und $F : f(\Omega) \to \mathbb{C}$ reell diff'bar, sowie $\varphi : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{C}$ diff'bar. Dann:

(1) $\frac{\partial}{\partial z}$ und $\frac{\partial}{\partial \bar z}$ sind $\mathbb{C}$-lineare Operatoren, für die die Produkt- und Quotientenregel gelten.

(2) $\overline{\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{\partial \bar f}{\partial \bar z}$ und $\overline{\frac{\partial f}{\partial \bar z}} = \frac{\partial \bar f}{\partial z}$.

(3) Ist f reell, so gilt $\overline{\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{\partial f}{\partial \bar z}$.

(4) $\frac{\partial z}{\partial z} = \frac{\partial \bar z}{\partial \bar z} = 1$, $\frac{\partial \bar z}{\partial z} = \frac{\partial z}{\partial \bar z} = 0$.

(5) $4\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar z} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \Delta f$ (Laplace-Operator)

Es gelten die folgenden Versionen der Kettenregel:

(6) $$\frac{\partial F\circ f}{\partial z}(z) = \frac{\partial F}{\partial w}(f(z)) \cdot \frac{\partial f}{\partial z}(z) + \frac{\partial F}{\partial \bar w}(f(z)) \cdot \frac{\partial \bar f}{\partial z}(z)$$

$$\frac{\partial F\circ f}{\partial \bar z}(z) = \frac{\partial F}{\partial w}(f(z)) \cdot \frac{\partial f}{\partial \bar z}(z) + \frac{\partial F}{\partial \bar w}(f(z)) \cdot \frac{\partial \bar f}{\partial \bar z}(z)$$

(7) $$\frac{d\, f\circ\varphi}{dt}(t) = \frac{\partial f}{\partial z}(\varphi(t))\, \frac{d\varphi}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial \bar z}(\varphi(t)) \cdot \frac{d\bar\varphi}{dt}(t).$$

Bem. und Hinweise:

(1) folgt "straight forward" aus den entsprechenden Regeln für $\frac{\partial}{\partial x}$ und $\frac{\partial}{\partial y}$.

(2) wird unten bewiesen; manchmal werden die Wirtinger Operatoren mit $\partial := \frac{\partial}{\partial z}$ und $\bar\partial := \frac{\partial}{\partial \bar z}$ bezeichnet. Dann nehmen diese Regeln die gut merkbare Gestalt $\overline{\partial f} = \bar\partial \bar f$ und $\overline{\bar\partial f} = \partial \bar f$ an – wie bei der komplexen Konjugation eines Produkts komplexer Zahlen.

(3) ist ein Spezialfall der ersten Gleichung in (2).

(4) Bew. ÜA, der zweite Teil sagt aus, dass $\bar z$ eine von z unabhängige Variable (und umgekehrt) ist. Man kann daher mit $\frac{\partial}{\partial z}$ und $\frac{\partial}{\partial \bar z}$ rechnen wie mit den üblichen partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x}$ und $\frac{\partial}{\partial y}$.

(5) Auch hier: Bew. ÜA. Man benötigt $f \in C^2(\Omega, \mathbb{C})$ für $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ (Satz von Schwarz!)

(6) ~~Die dritte~~ Beide Identitäten ~~wird~~ werden unten gezeigt, ~~die zweite geht genauso.~~

(7) Bleibt Ihnen zur Übung überlassen. Erinnern Sie sich an den Spezialfall der Kettenregel aus Ana II für die Situation

$$\mathbb{R} \supset I \xrightarrow{\varphi} \underset{\mathbb{R}^2}{\Omega} \xrightarrow{f} \mathbb{R}.$$

(Warum kann man o.E. $f: \Omega \to \mathbb{R}$ annehmen?)

Bew. von (2): Aus

$$f(z_0+h)-f(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)\, h + \frac{\partial f}{\partial \bar z}(z_0)\cdot \bar h + \varphi(h)$$

folgen

$$\bar f(z_0+h)-\bar f(z_0) = \overline{\frac{\partial f}{\partial z}}(z_0)\cdot \bar h + \overline{\frac{\partial f}{\partial \bar z}}(z_0)\cdot h + \bar\varphi(h) \quad \text{und}$$

$$\text{''} \qquad = \frac{\partial \bar f}{\partial z}(z_0)\cdot h + \frac{\partial \bar f}{\partial \bar z}(z_0)\cdot \bar h + \tilde\varphi(h)$$

(Im ersten Fall hat man die Gleichung gequert, im zweiten f durch $\bar f$ ersetzt.) Jetzt $h = |h|\cdot e^{i\varphi}$, durch $|h|$ teilen und $|h| \to 0$. Ergibt

$$\left(\overline{\frac{\partial f}{\partial z}}(z_0) - \frac{\partial \bar f}{\partial \bar z}(z_0) \right) e^{-i\varphi} = \left(\frac{\partial \bar f}{\partial z}(z_0) - \overline{\frac{\partial f}{\partial \bar z}}(z_0) \right)\cdot e^{i\varphi},$$

wobei $\varphi \in [0, 2\pi)$ beliebig ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn beide $(\ )$n $= 0$ sind. (Wähle z.B. $\varphi = 0$ und $\varphi = \frac{\pi}{2}$.)

zu (6) $\quad F(f(z+h)) - F(f(z))$

$$= F\left(f(z) + \frac{\partial f}{\partial z}(z)\, h + \frac{\partial f}{\partial \bar z}(z)\cdot \bar h + \varphi(h) \right) - F(f(z))$$

$$= \frac{\partial F}{\partial w}(f(z))\cdot \left(\frac{\partial f}{\partial z}(z)\cdot h + \frac{\partial f}{\partial \bar z}(z)\cdot \bar h + \varphi(h) \right)$$

$$+ \frac{\partial F}{\partial \bar w}(f(z))\cdot \left(\overline{\frac{\partial f}{\partial z}}(z)\cdot \bar h + \overline{\frac{\partial f}{\partial \bar z}}(z)\cdot h + \overline{\varphi(h)} \right) + \psi_1(h)$$

$$= \left(\frac{\partial F}{\partial w}(f(z))\cdot \frac{\partial f}{\partial z}(z) + \frac{\partial F}{\partial \bar w}(f(z))\cdot \frac{\partial \bar f}{\partial z}(z) \right)\cdot h \leftarrow (2)$$

$$+ \left(\frac{\partial F}{\partial \bar w}(f(z))\cdot \frac{\partial \bar f}{\partial \bar z}(z) + \frac{\partial F}{\partial w}(f(z))\cdot \frac{\partial f}{\partial \bar z}(z) \right)\cdot \bar h + \psi_1(h)$$

Andererseits ist

$$F(f(z+h)) - F(f(z)) = \frac{\partial F\circ f}{\partial z}(z)\cdot h + \frac{\partial F\circ f}{\partial \bar z}(z)\cdot \bar h + \psi_2(h)$$

Jetzt wie oben: $h = |h|\cdot e^{i\varphi}$, $\cdot \frac{1}{|h|}$, dann $|h| \to 0$. Erlaubt den Vergleich der Koeffizienten von h und von $\bar h$, was tatsächlich beide behaupteten Identitäten ergibt. $\square$

Wir führen noch zwei Begriffe ein, die mit kurzen Anwendungen dieser Rechenregeln verbunden sind:

Def. $f: \Omega \to \mathbb{C}$ heißt antiholomorph, wenn $\bar f: \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph ist.

Dies ist genau dann der Fall, wenn f reell diff'bar ist und $\frac{\partial f}{\partial z}(z) = 0 \ \forall z \in \Omega$. (Regel 2: $\frac{\partial \bar f}{\partial \bar z} = \overline{\frac{\partial f}{\partial z}}$)

Def.: $u \in C^2(\Omega)$ heißt harmonisch, wenn

$$\Delta u(z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(z) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(z) = 0 \quad \forall z \in \Omega.$$

Regel (5) ergibt: Ist $u \in C^2(\Omega)$ der Real- oder Imaginärteil einer holomorphen oder antiholomorphen Funktion, so ist u harmonisch.