4. Konforme Abbildungen

Def.: Eine lineare Abbildung $A: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto Ax$ mit $k \leq n$ heißt <u>winkeltreu</u> (oder: <u>winkelerhaltend</u>), wenn ein $\varrho > 0$ existiert, so dass $A^T A = \varrho^2 E_k$ ($k \times k$ Einheitsmatrix).

<u>Bem.</u> und <u>Bsp.</u>: (1) Ist $A^T A = \varrho^2 E_k$, so gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$, dass

$$\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, A^T A y \rangle = \varrho^2 \langle x, y \rangle,$$

was für $x = y$ $|Ax| = \varrho |x|$ bedeutet. Daher gilt in diesem Fall

$$\frac{\langle Ax, Ay \rangle}{|Ax|\,|Ay|} = \frac{\varrho^2 \langle x, y \rangle}{\varrho |x| \varrho |y|} = \frac{\langle x, y \rangle}{|x|\,|y|}.$$

Der $\cos(\sphericalangle(x,y))$ bleibt unter A also erhalten.

(2) Hinreichende Bedingungen für die Winkeltreue von A sind:

(i) Es gibt ein $\varrho > 0$, so dass für alle Einheitsvektoren $e \in \mathbb{R}^k$ gilt $|Ae| = \varrho$, oder

(ii) $A \neq 0$ und für alle $x, y \in \mathbb{R}^k$ mit $\langle x, y \rangle = 0$ ist $\langle Ax, Ay \rangle = 0$.

(Bew. als Übungsaufgabe)

(3) Seien $B:\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ und $A:\mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^n$ winkelerhaltend, (46)

also $A^TA = \varrho^2 E_l$ und $B^TB = \sigma^2 E_k$ mit $\varrho, \sigma > 0$. Dann ist

$$(AB)^T(AB) = B^TA^TAB = \varrho^2 B^T E_l B = \varrho^2 B^T B = \varrho^2\sigma^2 E_k .$$

Die Verknüpfung winkelerhaltender linearer Abbildungen ist also wieder winkelerhaltend.

(4) Bsp.: Die Einbettung $j:\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$, Drehungen, Spiegelungen, Streckungen (gleiche in jede Raumrichtung, also $A = \lambda E$) und alles, was man daraus zusammenbauen kann.

<u>Def.</u>: Eine differenzierbare Abbildung $f:\mathbb{R}^k \supset \Omega \to \mathbb{R}^n$ heißt (a) <u>konform</u> in $x_0 \in \Omega$, wenn $Df(x_0)$ winkelerhaltend ist,

(b) konform (in Ω), wenn f in jedem $x_0 \in \Omega$ konform ist.

<u>Bem.</u>: (1) Translationen $x \mapsto x + b$ ($b \in \mathbb{R}^n$ fest) sind (bei dieser Wahl der Begriffe) konform, aber nicht winkeltreu.

(2) Aufgrund der Kettenregel ist die Verknüpfung konformer Abbildungen wieder konform.

(3) Geometrische Interpretation: Die Schnittwinkel differenzierbarer Kurven bleiben unter

konformen Abbildungen erhalten. Damit ist gemeint:

Seien $\alpha, \beta : \mathbb{R} \supset I \to \Omega \subset \mathbb{R}^k$ diff'bar und

$$\alpha(t_0) = \beta(t_0) = x_0 \in \Omega \quad \text{und} \quad \alpha'(t_0) \neq 0 \neq \beta'(t_0)$$

und $f : \Omega \to \mathbb{R}^k$ konform in x_0 und $Df(x_0)^T Df(x_0) = \varrho^2 E_k$ (wobei $\varrho = \varrho(x_0)$). Dann ist nach der Kettenregel:

$$\frac{\langle (f\circ\alpha)'(t_0), (f\circ\beta)'(t_0)\rangle}{|(f\circ\alpha)'(t_0)||(f\circ\beta)'(t_0)|} = \frac{\langle Df(x_0)\cdot\alpha'(t_0), Df(x_0)\cdot\beta'(t_0)\rangle}{|Df(x_0)\alpha'(t_0)||Df(x_0)\cdot\beta'(t_0)|}$$

$$= \frac{\varrho(x_0)^2 \langle \alpha'(t_0), \beta'(t_0)\rangle}{\varrho(x_0)|\alpha'(t_0)|\,\varrho(x_0)|\beta'(t_0)|} = \frac{\langle\alpha'(t_0), \beta'(t_0)\rangle}{|\alpha'(t_0)||\beta'(t_0)|}.$$

Lemma 1: Ist $f : \mathbb{C} \supset \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph und $\frac{\partial f}{\partial z}(z) \neq 0$ $\forall z \in \Omega$ oder antiholomorph und $\frac{\partial f}{\partial \bar z}(z) \neq 0$ $\forall z \in \Omega$. Dann ist f konform.

Bew.: Im ersten Fall haben wir $Df(z) = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ und $\alpha = \frac{\partial g}{\partial x}(z) = \frac{\partial h}{\partial y}(z)$ und $\beta = -\frac{\partial g}{\partial y}(z) = \frac{\partial h}{\partial x}(z)$ und daher

$$Df(z)^T Df(z) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = (\alpha^2+\beta^2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und $\alpha^2+\beta^2 = |\alpha + i\beta|^2 \underset{f \text{ holo.}}{=} |f'(z)|^2 = \left|\frac{\partial f}{\partial z}(z)\right|^2 \underset{\text{n.V.}}{>} 0$

Im zweiten Fall ist $\bar f$ holomorph, ~~da~~ nach dem ersten Teil also konform. Da die Spiegelung $\bar{\ } : z \mapsto \bar z$ konform ist, ist auch $f = \bar{\ } \circ \bar f$ konform. $\square$

Bem.: Einen geometrischen Unterschied zwischen holomorphen und antiholomorphen gibt es allerdings:

Ist $f:\Omega\to\mathbb{C}$ holomorph, so hat die Jacobi-Matrix von f die Gestalt

$$Df(z)=\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}$$

und die Determinante $\det Df(z)=\alpha^2+\beta^2=\left|\frac{\partial f}{\partial z}(z)\right|^2$. Diese ist positiv, wenn $\frac{\partial f}{\partial z}(z)\neq 0$ ist, und das heißt: $Df(z)$ ist orientierungserhaltend. Ist f hingegen antiholomorph, so ist $f=\overline{}\circ\overline{f}$ die Verknüpfung einer holomorphen Funktion $(\overline{f})$ und der orientierungsumkehrenden Spiegelung an der x-Achse. Daher ist $Df(z)$ in diesem Fall orientierungsumkehrend.

Kehren wir noch einmal zur allgemeinen Situation

$$f:\mathbb{R}^k\supset\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^n$$

zurück. Dann liefert das folgende Lemma eine hinreichende (nicht notwendige, betrachte $f(z)=z^2$) Bedingung für Konformität.

Lemma 2: Es seien $f\in C^1(\Omega,\mathbb{R}^n)$ und $\rho:\Omega\to(0,\infty)$ stetig, so dass für alle $x,y\in\Omega$ die Gleichung

$$|f(x)-f(y)|^2=\rho(x)\,\rho(y)\,|x-y|^2$$

besteht. Dann ist f konform und es gilt

$$Df(x)^T\,Df(x)=\rho(x)^2\,E_k.$$

Bew.: Wir schreiben $y = x+h$ und haben

$$f(x+h) - f(x) = Df(x)h + \varphi(h)$$

mit $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\varphi(h)}{|h|} = 0$. Hieraus folgt

$$g(x)g(x+h)|h|^2 = |f(x+h) - f(x)|^2$$

$$= \langle Df(x)\cdot h + \varphi(h), Df(x)\cdot h + \varphi(h)\rangle.$$

Nach Dividieren durch $|h|^2$ mit $\hat{h} = \frac{h}{|h|}$ also:

$$g(x)g(x+h) = \langle \hat{h}, Df(x)^T Df(x)\hat{h}\rangle + \langle \frac{\varphi(h)}{|h|}, 2Df(x)\hat{h} + \frac{\varphi(h)}{|h|}\rangle$$

Jetzt $h = te$ mit einem beliebigen festen Einheitsvektor $e \in \mathbb{R}^k$ und dann $t \to 0$. Ergibt

$$g(x)^2 = \langle e, Df(x)^T Df(x)e\rangle.$$

Nach Bem. (2) zur Def. von Winkeltreue ist $Df(x)$ winkeltreu, für den Zusatz wähle man $e = e_\ell$, $1 \le \ell \le k$. $\square$

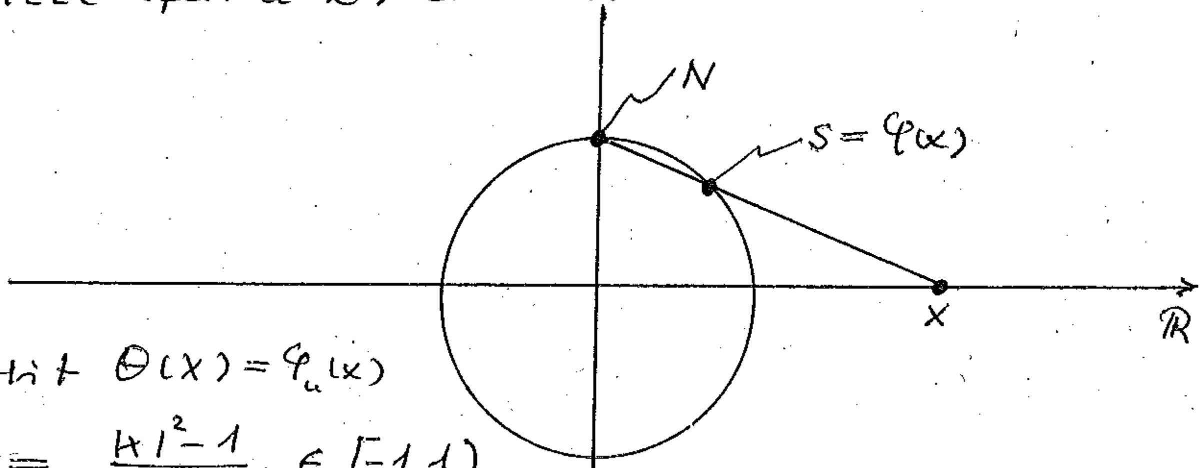
Das Lemma benutzen wir im nächsten Beispiel zum Nachweis der Konformität. Dies Bsp. ist immerhin so wichtig, dass wir es als „Satz" formulieren:

Satz 1: Für $n \geq 2$ sei $\varphi : \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $x \mapsto \varphi(x)$ definiert durch

$$\varphi_i(x) := \frac{2x_i}{1+|x|^2} \quad (1 \leq i \leq n-1) \quad \text{und} \quad \varphi_n(x) := \frac{|x|^2-1}{1+|x|^2}$$

und $S^{n-1} := \{ s \in \mathbb{R}^n : |s| = 1 \}$ sowie $N = (0, \dots, 0, 1) \in S^{n-1}$ der "Nordpol" dieser Sphäre. Dann bildet φ den $\mathbb{R}^{n-1}$ bijektiv und konform auf $S^{n-1} \setminus \{N\}$ ab. Die Umkehrabbildung $\psi := \varphi^{-1} : S^{n-1} \setminus \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ hat die Gestalt $\psi(s) = \dfrac{s'}{1-s_n}$. Sie wird als "stereografische Projektion" bezeichnet.
(Hierbei: $s' = (s_1, \dots, s_{n-1})$)

Skizze (für $n=2$) und Bem.:



Mit $\Theta(x) = \varphi_n(x)$

$= \dfrac{|x|^2-1}{1+|x|^2} \in [-1, 1)$

ist $1 - \Theta(x) = \dfrac{2}{1+|x|^2}$ und also $(1-\Theta(x))\,x = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_{n-1}(x))$.

Damit liegt $\varphi(x) = (1-\Theta(x))\,(x, 0) + \Theta(x) \cdot N$ auf einer Geraden, die $(x, 0)$ und N verbindet.

Von der Sphäre aus betrachtet: Man erhält $x = \psi(s)$ als <u>Zentralprojektion</u> von $s \in S^{n-1}$ vom Nordpol aus auf den $\mathbb{R}^{n-1}$, der durch $x \mapsto (x, 0)$ in den $\mathbb{R}^n$ eingebettet ist.

Bew. des Satzes:

(i) Zuerst stellen wir fest, dass

$$|\varphi(x)|^2 = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x)^2 = \frac{1}{(1+|x|^2)^2}\left(\sum_{i=1}^{n-1} 4x_i^2 + (|x|^2-1)^2\right)$$

$$= \frac{1}{(1+|x|^2)^2}\left(4|x|^2 + |x|^4 - 2|x|^2 + 1\right) = \frac{(1+|x|^2)^2}{(1+|x|^2)^2} = 1.$$

Also ist $\varphi(\mathbb{R}^{n-1}) \subset S^{n-1}$. Wegen $\varphi_n(x) < 1$ wird der Nordpol N nicht erreicht.

(ii) Nun seien $s \in S^{n-1} \setminus \{N\}$ und $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ mit $\varphi(x) = s$. Dann gilt insbesondere

$$s_n = \frac{|x|^2-1}{|x|^2+1} \iff s_n(|x|^2+1) = |x|^2 - 1 \iff s_n + 1 = |x|^2(1-s_n)$$

$$\iff |x|^2 = \frac{1+s_n}{1-s_n}.$$

(iii) Hieraus folgt die Injektivität von φ. Denn ist $\varphi(x) = \varphi(y) = s$, so folgt aus (ii) $|x|^2 = \frac{1+s_n}{1-s_n} = |y|^2$, und damit

$$\varphi_i(x) = \varphi_i(y) \iff \frac{2x_i}{1+|x|^2} = \frac{2y_i}{1+|y|^2} \overset{|x|^2=|y|^2}{\iff} x_i = y_i \quad \forall i \in \{1,\dots,n-1\}.$$

(iv) Um zu $s \in S^{n-1} \setminus \{N\}$ ein Urbild $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ zu finden, ist neben $s_i = \frac{2x_i}{1+|x|^2}$ $(1 \le i \le n-1)$ nach (ii) noch $|x|^2 = \frac{1+s_n}{1-s_n}$ erforderlich, also $1+|x|^2 = \frac{2}{1-s_n}$. Einsetzen ergibt $\frac{s_i}{1-s_n} = x_i$ $(1 \le i \le n-1)$. Mit $s' = (s_1,\dots,s_{n-1})$ heißt das: $\psi(s) = \frac{s'}{1-s_n}$. (Liest man die Rechnung rückwärts, erhält man die Surjektivität von φ.)

Forts. des Beweises von Satz 1:

(v) $|\varphi(x)-\varphi(y)|^2 \underset{(i)}{=} 1-2\langle\varphi(x),\varphi(y)\rangle+1 = 2(1-\langle\varphi(x),\varphi(y)\rangle)$

$$= 2\,\frac{1}{(1+|x|^2)(1+|y|^2)}\left((1+|x|^2)(1+|y|^2)-(4\langle x,y\rangle+(|x|^2-1)(|y|^2-1))\right)$$

$$= \frac{4}{(1+|x|^2)(1+|y|^2)}\left(|x|^2+|y|^2-2\langle x,y\rangle\right) = \frac{4\,|x-y|^2}{(1+|x|^2)(1+|y|^2)}$$

$$= \delta(x)\,\delta(y)\,|x-y|^2 \text{ mit } \delta(x)=\frac{2}{1+|x|^2}.$$

Mit Lemma 2 folgt die Konformität von φ. $\square$

Damit kommen wir zurück auf die Ein-Punkt-Kompaktifizierung von $\mathbb{C}$ zu $\hat{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ (vgl. Abschnitt 1.4.2), die wir hier auf $n\geq 2$ Raumdimensionen verallgemeinern. ($\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$ entspricht dem Fall $n=3$.) Wir definieren $\widehat{\mathbb{R}^n}:=\mathbb{R}^n\cup\{\infty\}$ und setzen φ fort zu

$$\hat{\varphi}: \widehat{\mathbb{R}^{n-1}} \longrightarrow S^{n-1},\ x\mapsto \hat{\varphi}(x):=\begin{cases}\varphi(x) & , x\in\mathbb{R}^{n-1}\\ N & , x=\infty.\end{cases}$$

Auf $\widehat{\mathbb{R}^{n-1}}$ führen wir die Metrik

$$\hat{d}(x,y):=|\hat{\varphi}(x)-\hat{\varphi}(y)|,$$

ein, dabei bezeichnet $|\cdot|$ die Euklidische Norm auf dem $\mathbb{R}^n$. Da $\hat{\varphi}$ injektiv ist, handelt es sich bei $\hat{d}$ tatsächlich um eine Metrik; für die Δs-Ungleichung müssen wir nichts tun!

Mit diesem "Trick" wird

$$\hat{\varphi} : (\hat{\mathbb{R}}^{n-1}, \hat{d}) \longrightarrow (S^{n-1}, |\ \ |)$$

per Definition zu einem isometrischen (= abstandserhaltenden) Isomorphismus (metrischer Räume).

Bestimmen wir zum Abschluss noch eine explizite Berechnungsvorschrift für $\hat{d}$:

Die Rechnung in Schritt (v) des Beweises von Satz 1 zeigt, dass für $x, y \in \mathbb{R}^{n-1}$:

$$\hat{d}(x,y) = |\varphi(x) - \varphi(y)| = \frac{2\,|x-y|}{(1+|x|^2)^{1/2}(1+|y|^2)^{1/2}} .$$

Für $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ und $y = \infty$ haben wir $\varphi(y) = N = (0,\dots,0,1)$ und daher

$$|\hat{\varphi}(x) - \hat{\varphi}(y)|^2 = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{4x_i^2}{(1+|x|^2)^2} + \left(\frac{|x|^2-1}{|x|^2+1} - 1 \right)^2$$

$$= \frac{1}{(1+|x|^2)^2} \left(4|x|^2 + 4 \right) = \frac{4}{(1+|x|^2)}, \text{ also}$$

$$\hat{d}(x,y) = |\hat{\varphi}(x) - \hat{\varphi}(y)| = \frac{2}{(1+|x|^2)^{1/2}} .$$

Es handelt sich also bei $\hat{d}$ genau um diejenige Metrik, die wir in 1.4.2 für $(\hat{\mathbb{C}}, \hat{d})$ angegeben haben. Da $(\hat{\mathbb{C}}, \hat{d})$ isometrisch isomorph ist zu $(S^2, |\ \ |)$, ist die Bezeichnung "Riemannsche Zahlensphäre" jetzt gerechtfertigt.