5. Kurvenintegrale

5.1 Integration komplexwertiger Funktionen

In Analysis I haben wir bereits das (Riemann-) Integral einer $\mathbb{C}$-wertigen Funktion $f = g + ih : [a,b] \to \mathbb{C}$ erklärt durch

$$\int_a^b f(t)\,dt := \int_a^b g(t)\,dt + i\int_a^b h(t)\,dt,$$

wobei sowohl g als auch h als (reellwertig und) integrierbar vorausgesetzt werden. Damit erhält man

(1) Die $\mathbb{C}$-Linearität des Integrals: $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$ gilt

$$\int_a^b \lambda f_1(t) + \mu f_2(t)\,dt = \lambda \int_a^b f_1(t)\,dt + \mu \int_a^b f_2(t)\,dt;$$

(2) die Intervalladditivität

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt,$$

die mit der Konvention $\int_a^b f(t)\,dt = -\int_b^a f(t)\,dt$ auch für $c<a$ oder $c>b$ gilt, sofern f auf den angegebenen Intervallen integrierbar ist;

(3) den Hauptsatz: Ist $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ integrierbar und $F : [a,b] \to \mathbb{C}$ differenzierbar mit $F' = f$, so gilt $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$.

Hierbei können endlich viele Ausnahmepunkte zugelassen werden, so dass die Gleichung auch für stückweise stetige, integrierbare Funktionen f gilt.

(4) Mit dem Hauptsatz verfügen wir auch über die Substitutionsregel und die Regel der partiellen Integration.

(5) Die Dreiecksungleichung für Integrale, das ist

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt$$

sollte für $\mathbb{C}$-wertige Funktionen kurz begründet werden: Wir wählen $\varphi \in [0, 2\pi)$, so dass

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| = e^{i\varphi}\int_a^b f(t)\,dt \overset{(1)}{=} \int_a^b e^{i\varphi} f(t)\,dt$$

$$= \mathrm{Re}\int_a^b e^{i\varphi} f(t)\,dt \overset{\text{Def.}}{=} \int_a^b \mathrm{Re}(e^{i\varphi} f(t))\,dt$$

$$\underset{\substack{\text{Monotonie}\\ \text{des Integrals im Reellen}}}{\leq} \int_a^b |e^{i\varphi} f(t)|\,dt = \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

5.2 Integrationswege

Die Begriffe "Weg" und "Kurve" werden synonym verwendet: Eine stetige Abbildung

$$\gamma : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{C},\quad t \mapsto \gamma(t),$$

definiert auf einem Intervall I, ist ein Weg bzw. eine Kurve. Ihr Bild $\gamma(I)$ heißt die Spur von γ. Verschiedene Wege können dieselbe Spur parametrisieren. Wege können zusammengesetzt und in entgegengesetzte Richtungen oder auch mehrfach durchlaufen werden:

Def.: Es seien $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ und $\beta : [b,c] \to \mathbb{C}$ Wege.

(a) Ist $\gamma(b) = \beta(b)$, so heißt

$$\gamma \oplus \beta : [a,c] \to \mathbb{C},\ t \mapsto \gamma \oplus \beta(t) := \begin{cases} \gamma(t) : t \in [a,b], \\ \beta(t) : t \in [b,c] \end{cases}$$

der aus γ und β zusammengesetzte Weg.

(b) $\gamma^- : [a,b] \to \mathbb{C},\ t \mapsto \gamma^-(t) := \gamma(a+b-t)$

heißt der zu γ reziproke Weg.

(c) γ heißt geschlossen, falls $\gamma(a) = \gamma(b)$ ist, und einfach geschlossen, wenn zudem $\gamma|_{[a,b)}$ injektiv ist.

Im Folgenden sollen Integrale stetiger Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{C}$ über Kurven γ erklärt werden, die in $\Omega \subset \mathbb{C}$ verlaufen. Dafür ist die Stetigkeit von γ nicht ausreichend, wir müssen mehr Regularität voraussetzen:

Def.: Ein Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ heißt

(a) ein <u>C^1-Weg</u>, wenn γ stetig differenzierbar ist,

(b) ein <u>stückweiser C^1-Weg</u>, wenn es endlich viele Punkte $a = a_0 < a_1 < \dots < a_N = b$ gibt, so dass die Einschränkungen $\gamma|_{[a_{j-1}, a_j]}$ $(1 \leq j \leq N)$ C^1-Wege sind.

<u>Bem.</u>: (1) In den Randpunkten ist die einseitige stetige Differenzierbarkeit verlangt.

(2) Stückweise C^1-Wege sind rektifizierbar, d.h. approximierbar durch Polygone. Man kann ihnen die wohldefinierte Länge

$$L(\gamma) := \sum_{j=1}^{N} \int_{a_{j-1}}^{a_j} |\gamma'(t)|\,dt$$

zuordnen.

<u>Bsp.</u>: (1) Es seien $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r > 0$. Die Abbildung

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \quad t \mapsto \gamma(t) := z_0 + r e^{it}$$

ist ein einfach geschlossener C^1-Weg mit $\gamma(0) = \gamma(2\pi) = z_0 + r$, der die Kreislinie $\partial B_r(z_0) = \gamma([0, 2\pi])$ entgegen dem Uhrzeigersinn durchläuft. Es ist $\gamma'(t) = i r e^{it}$ und daher

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} |i r e^{it}|\,dt = 2\pi r.$$

Die Bogenlänge wird hier tatsächlich als eine Eigenschaft der Kurve γ und nicht ihres Bildes $\gamma([a,b])$ aufgefasst. z.B. ist die Länge der K-fach durchlaufenen Kreislinie

$$\gamma_K : [0, 2\pi K] \to \mathbb{C}, \; t \mapsto \gamma_K(t) := z_0 + re^{it}$$

definitionsgemäß gleich

$$L(\gamma_K) = \int_0^{2\pi K} |\gamma_K'(t)|\, dt = 2\pi r \cdot K.$$

Der reziproke Weg zu γ ist

$$\gamma^- : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \; t \mapsto \gamma^-(t) := z_0 + re^{-it} \; (= \gamma(2\pi - t))!,$$

Man nennt γ (bzw. γ^-) auch die positiv (bzw. negativ) orientierte Kreislinie vom Radius r um z_0.

(2) Sind $z_0, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ gegeben, so definieren wir

$$\gamma : [0, n] \to \mathbb{C}, \; t \mapsto \gamma(t) := z_k + (t-k)(z_{k+1} - z_k), \quad t \in [k, k+1].$$

γ wird mit $[z_0, \dots, z_n]$ bezeichnet und ist ein stückweiser C^1-Weg, der den Streckenzug mit den Ecken $z_0, \dots, z_n$ beschreibt. Er ist geschlossen, wenn $z_0 = z_n$ gilt. Der reziproke Weg ist

$$[z_0, \dots, z_n]^- = [z_n, \dots, z_0].$$

Parametrisiert man $[z_k, \dots, z_n]$ als Weg

$\gamma : [k,n] \to \mathbb{C}$ (statt $[0, n-k] \to \mathbb{C}$!), so ist

$$[z_0, \dots, z_k] \oplus [z_k, \dots, z_n] = [z_0, \dots, z_n].$$

Spezialfälle:

(i) $[z_0, z_1] : [0,1] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto z_0 + t(z_1 - z_0)$

Für $z_0 \neq z_1$ ist das die Strecke von z_0 nach z_1. Der reziproke Weg ist $[z_0, z_1]^- = [z_1, z_0]$. (Strecke von z_1 nach z_0.)
Für $z_0 = z_1$ nimmt $[z_0, z_1]$ konstant den Wert z_0 an, das ist der sog. "Nullweg", den wir tatsächlich irgendwann einmal brauchen werden.

(ii) Dreiecksweg: Liegen $z_0, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ nicht auf einer Geraden, so beschreibt

$$[z_0, z_1, z_2, z_0] : [0,3] \to \mathbb{C}$$

den Rand $\partial\Delta$ eines Dreiecks Δ mit den Ecken z_0, z_1 und z_2. In diesem Fall ist $[z_0, z_1, z_2, z_0]$ <u>einfach geschlossen</u>. Der reziproke Weg $[z_0, z_1, z_2, z_0]^- = [z_0, z_2, z_1, z_0]$ durchläuft denselben Dreiecksrand mit entgegengesetzter Orientierung.

5.3 Integration über Kurven

Def.: Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f: \Omega \to \mathbb{C}$ stetig und $\gamma: [a,b] \to \Omega$ ein stückweiser C^1-Weg. Dann heißt

$$\int_\gamma f(z)\,dz := \sum_{j=1}^{N} \int_{a_{j-1}}^{a_j} f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$$

das Integral von f entlang γ (oder über γ).

("Weg-" oder "Kurvenintegral")

Bsp.: Sei $\gamma: [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \gamma(t) = z_0 + r\cdot e^{it}$. Dann ist für $k \in \mathbb{Z}$

$$\int_\gamma (z-z_0)^k\,dz = \int_0^{2\pi} r^k e^{itk} \cdot i r e^{it}\,dt$$

$$= i r^{k+1} \cdot \int_0^{2\pi} e^{i(k+1)t}\,dt =: I_k .$$

Hierbei ist $I_{-1} = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$, bemerkenswert ist die Unabhängigkeit von r! Für $k \neq -1$ gilt

$$I_k = i r^{k+1} \cdot \frac{1}{i(k+1)} \cdot e^{i(k+1)t} \Big|_0^{2\pi} = 0 .$$

Satz 1 (einfache Eigenschaften von Wegintegralen):
Es seien $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f, f_1, f_2 : \Omega \to \mathbb{C}$ stetig und $\gamma: [a,b] \to \Omega$ ein stückweiser C^1-Weg.
Dann gelten:

(1) $\int_\gamma \lambda f_1(z) + \mu f_2(z)\,dz = \lambda \int_\gamma f_1(z)\,dz + \mu \int_\gamma f_2(z)\,dz$,

(2) $\int_{\gamma^-} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz$,

(3) Ist $\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2$ mit $\gamma_1 : [a,c] \to \Omega$ und $\gamma_2 : [c,b] \to \Omega$,

so gilt $\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz$;

(4) $\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq L(\gamma) \cdot \|f\|_{\gamma([a,b])}$.

Bem.: (1) Im folgenden wie auch in allen weiteren Beweisen in diesem Abschnitt können wir O.E. annehmen, dass γ ein C^1-Weg ist. Den allgemeinen Fall "γ ist stückweise C^1" kann man stets durch Summation der endlich vielen Teilstücke darauf zurückführen.

(2) Die Ungleichung in (4) wird als "Standardabschätzung" bezeichnet und sehr häufig verwendet.

Bew.: (1) folgt aus der Linearität des Integrals für $\mathbb{C}$-wertige Funktionen und (3) aus dessen Intervalladditivität. Zu (2):

$$\int_{\gamma^-} f(z)dz = \int_a^b f(\gamma^-(t))(\gamma^-)'(t)dt = -\int_a^b f(\gamma(a+b-t))\gamma'(a+b-t)dt.$$

Jetzt substituiert man $s = a+b-t \leadsto dt = -ds$ $\wedge$ $t = a$ $(t=b) \iff s = b$ $(s=a)$. Also

$$\ldots = \int_b^a f(\gamma(s))\gamma'(s)ds = -\int_a^b f(\gamma(s))\gamma'(s)ds = -\int_\gamma f(z)dz.$$

Zu (4): $\left|\int_\gamma f(z)dz\right| = \left|\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt\right|$ Jetzt: Δs-Ungleichung für $\mathbb{C}$-wertige Integrale! (62)

$$\leq \int_a^b |f(\gamma(t))||\gamma'(t)|dt \leq \sup_{z\in\gamma([a,b])} |f(z)| \cdot \int_a^b |\gamma'(t)|dt. \qquad \square$$

Nach (2) ändert sich das Vorzeichen eines Kurvenintegrals, wenn die Laufrichtung umgekehrt wird. Ansonsten ist das Wegintegral aber unabhängig von der Parametrisierung, wie das folgende Lemma zeigt.

Lemma 1 (Umparametrisierung): Es seien $\Omega\subset\mathbb{C}$ offen, $f:\Omega\to\mathbb{C}$, $\gamma:[c,d]\to\Omega$ ein stückweiser C^1-Weg und $\varphi:[a,b]\to[c,d]$ stetig diff'bar, bijektiv mit $\varphi(a)=c$ und $\varphi(b)=d$. Dann gilt

$$\int_{\gamma\circ\varphi} f(z)dz = \int_\gamma f(z)dz.$$

Bew.: $\int_{\gamma\circ\varphi} f(z)dz = \int_a^b f(\gamma\circ\varphi(t))(\gamma\circ\varphi)'(t)dt$

$$= \int_a^b f(\gamma(\varphi(t)))\cdot\gamma'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt$$

nach der Kettenregel. Jetzt substituiert man $s=\varphi(t)$, mit $ds=\varphi'(t)dt$ und $t=a$ $(t=b)$ $\Leftrightarrow$ $s=\varphi(a)=c$ $(s=d)$, so dass

$$\ldots = \int_c^d f(\gamma(s))\,\gamma'(s)ds = \int_\gamma f(z)dz.$$

$\square$

Es gilt die folgende Version der Substitutionsregel:

Satz 2: Es seien $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{C}$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ stetig, $g : \Omega' \to \Omega$ holomorph[1)] und $\gamma : [a,b] \to \Omega'$ ein stückweiser C^1-Weg. Dann gilt

$$\int_{g\circ\gamma} f(z)\,dz = \int_{\gamma} f(g(w))\,g'(w)\,dw.$$

Skizze der Abbildungen:

$$\begin{tikzcd} {[a,b]} \arrow[r, "\gamma \,\leftarrow C^1_{st}"] \arrow[rr, bend right, "g\circ\gamma"'] & \Omega' \arrow[r, "g \,\leftarrow \text{holo}"] & \Omega \arrow[r, "f \,\leftarrow C^0"] & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

$g\circ\gamma$ d'bar (tatsächlich auch C^1_{st} → später)

Bew.: $\displaystyle\int_{g\circ\gamma} f(z)\,dz \underset{\text{Def.}}{=} \int_a^b f(g\circ\gamma(t))\,(g\circ\gamma)'(t)\,dt$

$$= \int_a^b f(g(\gamma(t)))\cdot g'(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt,$$

letzteres aufgrund der Kettenregel (7) in Satz 4, Abschnitt 3.3, unter Beachtung der Holomorphie von g. Die Definition des Kurvenintegrals ergibt

$$\ldots = \int_{\gamma} f\circ g(w)\cdot g'(w)\,dw.$$

$\square$

1) An dieser Stelle sollte man genauer g als stetig komplex diffbar voraussetzen. Später werden wir sehen, dass holomorphe Funktionen immer eine stetige Ableitung haben.

Für die Vertauschbarkeit von Kurvenintegralen mit dem Grenzwert von Funktionenfolgen gilt:

Satz 3: Es sei $\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$ ein stückweiser C^1-Weg und $(f_n)_n$ eine Folge stetiger Funktionen $f_n: \gamma([a,b]) \to \mathbb{C}$, die gleichmäßig gegen eine Funktion $f: \gamma([a,b]) \to \mathbb{C}$ konvergiert. Dann ist (f stetig und)

$$\lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz.$$

Bew.: Das folgt aus der Standardabschätzung

$$\left| \int_\gamma f_n(z) - f(z)\,dz \right| \leq L(\gamma)\, \| f_n - f \|_{\gamma([a,b])}. \quad \square$$

Bem.: (1) Die Voraussetzung $\lim_{n\to\infty} \| f_n - f \|_{\gamma([a,b])} = 0$ des Satzes ist insbes. dann erfüllt, wenn für offenes $\Omega \subset \mathbb{C}$ die $f_n: \Omega \to \mathbb{C}$ kompakt gegen $f: \Omega \to \mathbb{C}$ konvergieren und $\gamma([a,b]) \subset \Omega$ ist.

(2) Angewendet auf die Partialsummenfolge einer Funktionenreihe ergibt der Satz:

Ist $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ eine Reihe stetiger Funktionen, die auf $\gamma([a,b])$ gleichmäßig konvergiert, so gilt

$$\int_\gamma \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)\,dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_\gamma f_n(z)\,dz.$$

(Desgl. für $\sum_{k\in\mathbb{Z}}$ anstelle von $\sum_{n=0}^{\infty}$.)

Zum Abschluss dieses Abschnitts führen wir noch den Begriff der Stammfunktion ein:

Def.: Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f, F: \Omega \to \mathbb{C}$ Funktionen mit $F' = f$. Dann heißt F eine <u>Stammfunktion</u> von f.

<u>Bem.</u>: Mit F ist auch $F + c$ ($c \in \mathbb{C}$ fest) eine Stammfunktion von f. Wenn Ω ein Gebiet ist, unterscheiden sich zwei Stammfunktionen von f höchstens um eine Konstante.

S<u>a</u>tz 4: Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f: \Omega \to \mathbb{C}$ stetig mit Stammfunktion F und $\gamma: [a,b] \to \Omega$ ein stückweiser C^1-Weg. Dann gilt

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Insbesondere ist $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$, wenn γ geschlossen ist.

<u>Bew.</u>: $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt$

Kettenregel $\to$ $= \int_a^b (F \circ \gamma)'(t)\,dt \overset{\text{Hauptsatz}}{=} F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$. $\square$

<u>Bem.</u>: Es gibt <u>keine</u> Nullumgebung $U \subset \mathbb{C}$, so dass die Funktion $z \mapsto \frac{1}{z}$ auf $U \setminus \{0\}$ eine Stammfunktion hätte. Dann wäre nämlich für ein hinreichend kleines $\varepsilon > 0$: $\int_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{dz}{z} = 0$, was nicht der Fall ist.