6. Der Cauchysche Integralsatz für sternförmige Gebiete

Vorbem. Zu den Begriffen "konvex", "sternförmig" und "wegzusammenhängend": Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ($\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$) und $M \subset V$ eine Teilmenge.

(1) M heißt <u>konvex</u>, wenn für alle $x, y \in M$ auch die Verbindungsstrecke $[x,y] := \{\lambda x + (1-\lambda) y \in V : 0 \leq \lambda \leq 1\} \subset M$ ist, vgl. die Diskussion zum Mittelwertsatz in Ana II.

(2) Die <u>konvexe Hülle</u> $\operatorname{conv}(M)$ von M ist der Durchschnitt aller konvexen Teilmengen von V, die M enthalten, und damit die kleinste konvexe Obermenge von M. Es gilt

$$\operatorname{conv}(M) = \{ \sum_{j=1}^{N} \lambda_j x_j : x_j \in M,\ 0 \leq \lambda_j,\ \sum_{j=1}^{N} \lambda_j = 1,\ N \in \mathbb{N} \}.$$

Die Linearkombinationen $\sum_{j=1}^{N} \lambda_j x_j$ mit $0 \leq \lambda_j$ und $\sum_{j=1}^{N} \lambda_j = 1$ nennt man <u>Konvexkombinationen</u>.

(3) M heißt <u>sternförmig</u> mit Zentrum $x_0 \in M$ (oder: bezüglich $x_0 \in M$), wenn zu jedem $x \in M$ auch die Verbindungsstrecke $[x_0, x] \subset M$ ist. (M heißt sternförmig, wenn es ein $x_0 \in M$ gibt, sodass M bezüglich x_0 sternförmig ist.) Es gilt

$$M \text{ konvex} \Rightarrow M \text{ sternförmig},$$

die Umkehrung ist falsch. Z.B. ist $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ sternförmig bezüglich eines jeden $x_0>0$, aber nicht konvex, denn für jedes $z\in\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ mit $\operatorname{Re} z\leq 0$ sind $z,\bar{z}\in\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$, aber $[z,\bar{z}]\not\subset\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$.

Bis hierher haben wir nur die Vektorraumstruktur benutzt. Ist V normiert (oder zumindest mit einer Topologie ausgestattet), steht uns der Begriff des (stetigen!) Weges zur Verfügung. Damit haben wir (in Abschnitt 1.4.3) erklärt:

(4) M heißt wegzusammenhängend, wenn zu $x,y\in M$ ein Weg $\gamma:[a,b]\to M$ existiert, so dass $\gamma(a)=x$ und $\gamma(b)=y$. – Es gilt

M sternförmig $\Rightarrow$ M wegzusammenhängend.

Auch hier ist die Umkehrung falsch, wie das Bsp. $M=\mathbb{C}\setminus\{0\}$ zeigt.

(– ENDE DER VORBEM. –)

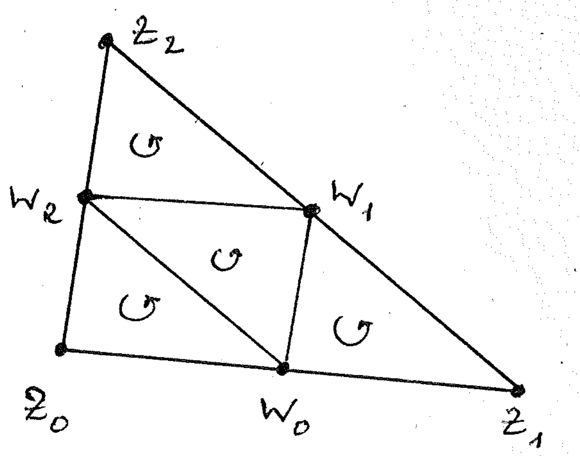
Satz 1 (Goursat): Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0, z_1, z_2 \in \Omega$, $\gamma_0 := [z_0, z_1, z_2, z_0]$ ein Dreiecksweg, so dass $\Delta_0 := \operatorname{conv}(\{z_0, z_1, z_2\})$ in Ω liegt, und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt

$$\int_{\gamma_0} f(z)\,dz = 0.$$

Bew.: Wir setzen

$$w_0 := \frac{1}{2}(z_0 + z_1), \quad w_1 := \frac{1}{2}(z_1 + z_2), \quad w_2 := \frac{1}{2}(z_2 + z_0)$$

und zerlegen Δ_0 in die vier Teildreiecke



$$\Delta_1^1 := \operatorname{conv}(\{z_0, w_0, w_2\})$$
$$\Delta_1^2 := \operatorname{conv}(\{w_0, z_1, w_1\})$$
$$\Delta_1^3 := \operatorname{conv}(\{w_0, w_1, w_2\})$$
$$\Delta_1^4 := \operatorname{conv}(\{w_1, z_2, w_2\}).$$

Die zugehörigen Dreieckswege bezeichnen wir mit $\gamma_1^1 := [z_0, w_0, w_2, z_0]$, $\gamma_1^2 := [w_0, z_1, w_1, w_0]$ usw., so dass alle "ihr" Dreieck mit derselben Orientierung umlaufen wie γ_0. Dann ist

$$\int_{\gamma_0} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1^1} f(z)\,dz + \ldots + \int_{\gamma_1^4} f(z)\,dz,$$

weil sich die Beiträge von den im Inneren von Δ_0 verlaufenden Strecken zu Null addieren.

Nun sei $\gamma_1 \in \{\gamma_1^k : k \in \{1,\dots,4\}\}$, so dass

$$\left|\int_{\gamma_1} f(z)\,dz\right| = \max_{k=1}^{4} \left|\int_{\gamma_1^k} f(z)\,dz\right|.$$

Dann ist

$$\left|\int_{\gamma_0} f(z)\,dz\right| \leq \sum_{k=1}^{4} \left|\int_{\gamma_1^k} f(z)\,dz\right| \leq 4 \cdot \left|\int_{\gamma_1} f(z)\,dz\right|.$$

Das von γ_1 berandete abgeschlossene Dreieck nennen wir Δ_1. Hiermit wiederholen wir die Prozedur und erhalten einen weiteren Dreiecksweg γ_2, der ein Dreieck Δ_2 einschließt, usw..
Insgesamt also eine absteigende Folge

$$\Delta_0 \supset \Delta_1 \supset \dots \supset \Delta_n \supset \Delta_{n+1} \supset \dots$$

abgeschlossener Dreiecke, berandet von Wegen γ_n der Längen $L(\gamma_n) = \frac{1}{2} L(\gamma_{n-1}) = \dots = 2^{-n} L(\gamma_0)$.
Für die Folge der Integrale erhalten wir durch Iteration die Abschätzung

$$\left|\int_{\gamma_0} f(z)\,dz\right| \leq 4^n \left|\int_{\gamma_n} f(z)\,dz\right|.$$

Aufgrund des Cantorschen Durchschnittssatzes gibt es ein $z_0 \in \Omega$, so dass $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Delta_n = \{z_0\}$. Da f als holomorph vorausgesetzt ist, existieren ein $\varepsilon > 0$ und eine Funktion $\varphi : B_\varepsilon(0) \to \mathbb{C}$ mit $\lim_{h \to 0} \frac{\varphi(h)}{h} = 0$, so dass für $|z - z_0| < \varepsilon$ gilt

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \varphi(z - z_0).$$

Nun hat die affin-lineare Anteil $z \mapsto f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$ die Stammfunktion

$$F(z) = f(z_0)(z - z_0) + \frac{1}{2} f'(z_0)(z - z_0)^2,$$

so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\int_{\gamma_n} f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)\, dz = 0$.

Damit gilt für n mit $\operatorname{diam} \Delta_n < \varepsilon$, dass

$$\int_{\gamma_n} f(z)\, dz = \int_{\gamma_n} \varphi(z - z_0)\, dz = \int_{\gamma_n} (z - z_0) \frac{\varphi(z - z_0)}{z - z_0}\, dz,$$

also wegen $|z - z_0| \leq L(\gamma_n)$ und mit der Standard-Abschätzung $\left| \int_{\gamma_n} f(z)\, dz \right| \leq L(\gamma_n)^2 \sup_{z \in \Delta_n} \left| \frac{\varphi(z - z_0)}{|z - z_0|} \right|$.

Insgesamt:

$$\left| \int_{\gamma_0} f(z)\, dz \right| \leq 4^n \cdot \left| \int_{\gamma_n} f(z)\, dz \right| \leq 4^n L(\gamma_n)^2 \sup_{z \in \Delta_n} \left| \frac{\varphi(z - z_0)}{z - z_0} \right|$$

$$\leq L(\gamma_0)^2 \cdot \sup_{z \in \Delta_n} \left| \frac{\varphi(z - z_0)}{z - z_0} \right| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

da $L(\gamma_n) \leq 2^{-n} L(\gamma_0)$

$\square$

Satz 2 (Goursat, punktierte Version): Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0, z_1, z_2 \in \Omega$, $\gamma_0 := [z_0, z_1, z_2, z_0]$ ein Dreiecksweg, so dass $\Delta_0 := \mathrm{conv}(\{z_0, z_1, z_2\}) \subset \Omega$, und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ stetig und, mit eventueller Ausnahme eines Punktes $\xi_0 \in \Omega$, holomorph. Dann gilt

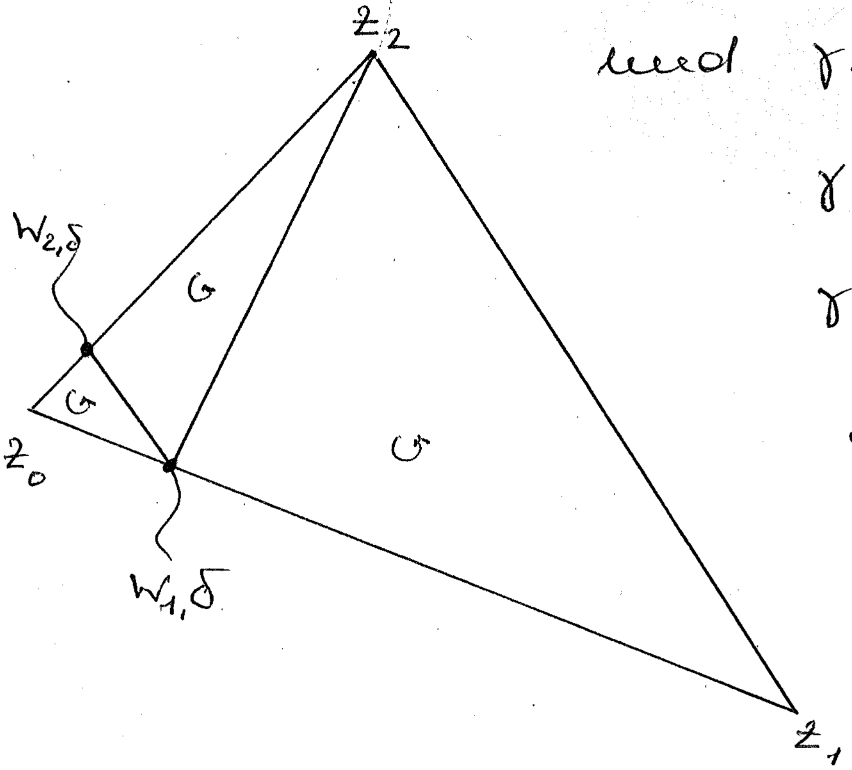
$$\int_{\gamma_0} f(z)\,dz = 0.$$

Bew.: Wenn $\xi_0 \notin \Delta_0$ ist, ist nichts zu zeigen, da dann Satz 1 mit $\Omega' = \Omega \setminus \{\xi_0\}$ anwendbar ist. Für $\xi_0 \in \Delta_0$ unterscheiden wir drei Fälle:

(1) ξ_0 ist eine Ecke von Δ_0, o.E. $\xi_0 = z_0$:

Für $\delta \in (0,1)$ definieren wir

$$w_{\delta,1} := z_0 + \delta(z_1 - z_0), \qquad w_{\delta,2} := z_0 + \delta(z_2 - z_0)$$



und $\gamma_1 := [z_0, w_{1,\delta}, w_{2,\delta}, z_0]$,

$\gamma_2 := [w_{1,\delta}, z_1, z_2, w_{1,\delta}]$,

$\gamma_3 := [w_{1,\delta}, z_2, w_{2,\delta}, w_{1,\delta}]$,

so dass

$$\int_{\gamma_0} f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{3} \int_{\gamma_j} f(z)\,dz.$$

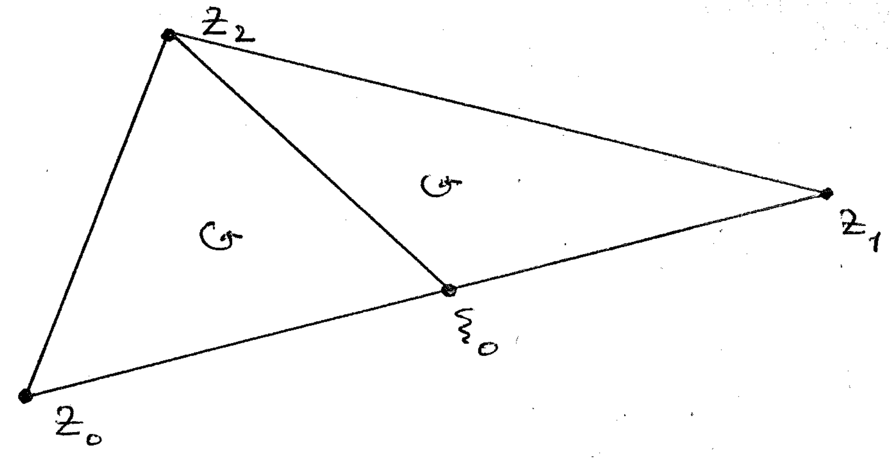
Nach Satz 1 ist $\int_{\gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\gamma_3} f(z)\,dz = 0$ und daher

$$\left| \int_{\gamma_0} f(z)\,dz \right| = \left| \int_{\gamma_1} f(z)\,dz \right| \leq L(\gamma_1)\cdot \|f\|_{\Delta_0}.$$

Da f stetig ist, ist $\|f\|_{\Delta_0} < \infty$, und aufgrund der Wahl von γ_1 ist $L(\gamma_1) = \delta L(\gamma_0)$. Also

$$\left| \int_{\gamma_0} f(z)\,dz \right| \leq \delta \cdot L(\gamma_0) \|f\|_{\Delta_0} \longrightarrow 0 \quad (\delta \to 0).$$

(2) ξ_0 liegt auf einer der Seiten von Δ_0, ist jedoch keine Ecke, o.E. $\xi_0 = \lambda z_1 + (1-\lambda) z_0$ für ein $\lambda \in (0,1)$:

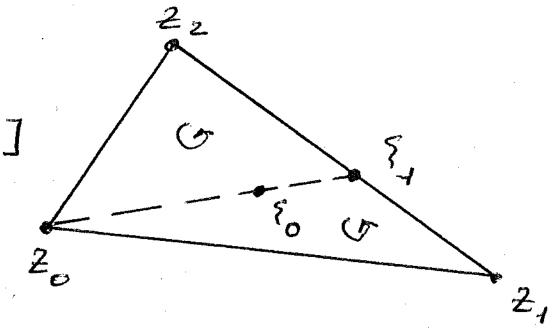


Dann definieren wir:

$$\gamma_1 := [z_0, \xi_0, z_2, z_0] \quad \text{und} \quad \gamma_2 := [\xi_0, z_1, z_2, \xi_0],$$

sodass $$\int_{\gamma_0} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz \underset{(1)}{=} 0.$$

(3) ξ_0 liegt im Inneren von Δ_0: Den Schnittpunkt von $\overline{z_0 \xi_0}$ mit der gegenüberliegenden



Dreiecksseite nennen wir ξ_1, und definieren $\gamma_1 := [z_0, z_1, \xi_1, z_0]$ sowie $\gamma_2 := [z_0, \xi_1, z_2, z_0]$, so dass wieder

$$\int_{\gamma_0} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz \underset{(2)}{=} 0. \qquad \square$$

Folgerung: Sind Ω, γ_0 und f wie in Satz 2, jedoch mit <u>endlich vielen</u> Punkten, in denen f lediglich stetig, aber nicht komplex diff'bar ist. Dann ist ebenfalls $\int_{\gamma_0} f(z)\,dz = 0$. Das sieht man induktiv mit einer Zerlegung wie oben.

Lemma 1: Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen und sternförmig mit Zentrum $z_0 \in G$. $f : G \to \mathbb{C}$ sei stetig und für jeden Dreiecksweg $\gamma : [a,b] \to G$ gelte

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = 0.$$

Dann besitzt f auf G eine Stammfunktion.

Bew.: Für $z \in G$ setzen wir $F(z) := \int_{[z_0, z]} f(w)\,dw$.

Zum Nachweis von $F'(z) = f(z)$ wählen wir $\varepsilon > 0$ so klein, dass $B_\varepsilon(z) \subset G$. Dann folgt für alle $h \in \mathbb{C}$ mit $|h| < \varepsilon$, dass

$$F(z+h)-F(z) = \int_{[z_0,z+h]} f(w)\,dw - \int_{[z_0,z]} f(w)\,dw = \int_{[z,z+h]} f(w)\,dw,$$

weil nach Vor. gilt

$$0 = \int_{[z_0,z+h,z,z_0]} f(w)\,dw = \int_{[z_0,z+h]} f(w)\,dw + \int_{[z+h,z]} f(w)\,dw + \int_{[z,z_0]} f(w)\,dw$$

$$= \int_{[z_0,z+h]} f(w)\,dw - \int_{[z_0,z]} f(w)\,dw - \int_{[z,z+h]} f(w)\,dw.$$

Hieraus ergibt sich

$$\left| \frac{1}{h}(F(z+h)-F(z)) - f(z) \right| \leq \frac{1}{|h|} \cdot \left| \int_{[z,z+h]} f(w)-f(z)\,dz \right|$$

$$\leq \sup_{w \in [z,z+h]} |f(w)-f(z)| \to 0 \quad (h \to 0),$$

letztes, weil f (z.B.) auf $\overline{B_{\frac{\varepsilon}{2}}(z)}$ gleichmäßig stetig ist. □

Folgerung: Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet und $f: G \to \mathbb{C}$ stetig und mit eventueller Ausnahme endlich vieler Punkte holomorph, so besitzt f auf G eine Stammfunktion. (Satz 2 + Lemma 1)

Da für Funktionen, die eine Stammfunktion besitzen, das Integral über geschlossene Integrationswege verschwindet (Abschnitt 5, Satz 4), haben wir gezeigt:

Cauchy'scher Integralsatz für sternförmige Gebiete:

Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet und $f: G \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, die mit eventueller Ausnahme endlich vieler Punkte holomorph ist, so gilt für jeden geschlossenen stückweisen C^1-Weg $\gamma: [a,b] \to G$, dass

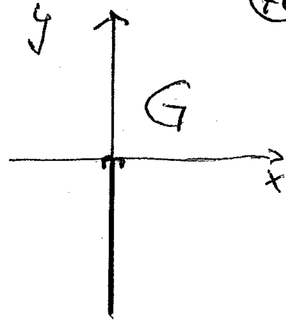
$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Der Cauchy'sche Integralsatz kann oft nutzbringend verwandt werden zur Berechnung uneigentlicher Integrale, die sich gegenüber reellen Methoden als widerspenstig erweisen – gerade auch dann, wenn diese Integrale nicht absolut konvergieren, wie bei den folgenden

Bsp.: $\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$ bzw. $\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin(t)}{t} dt = \pi$.

Im Nullpunkt ist der Integrand harmlos, da $\lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$. Die Integrierbarkeit auf $[\pi,\infty)$ haben wir in Ana I durch partielle Integration nachgewiesen. Ebenfalls gezeigt haben wir, dass $\int_0^\infty \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| dt = \infty$, dass also dieses Integral <u>nicht absolut</u> konvergiert.

Zur Berechnung seien



$$G := \mathbb{C}\setminus i(-\infty,0] = \{z=x+iy\in\mathbb{C} : y>0 \vee x\neq 0\}$$

und $f : G\mapsto\mathbb{C},\ z\mapsto f(z) := -i\,\dfrac{e^{iz}}{z}$.

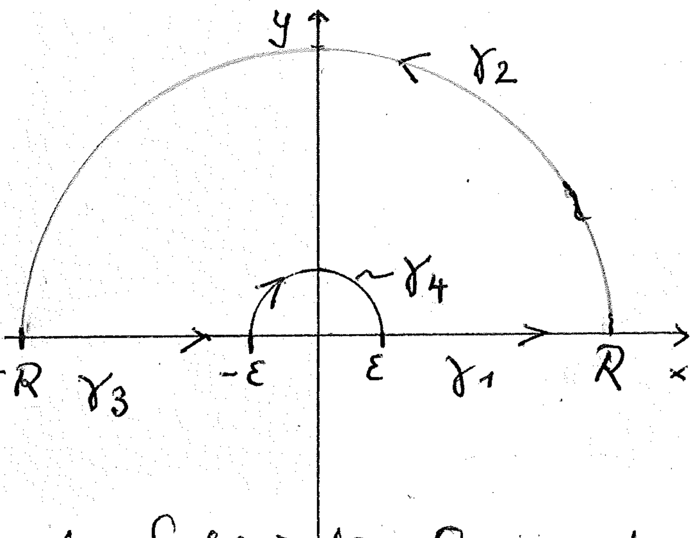
G ist sternförmig bezüglich jedes Punktes $z=iy$ mit $y>0$. f soll integriert werden über den in G verlaufenden Weg $\gamma=\gamma_1\oplus\gamma_2\oplus\gamma_3\oplus\gamma_4$, wobei

$\gamma_1 : [\varepsilon,R]\to G,\ t\mapsto t,$

$\gamma_2 : [0,\pi]\to G,\ t\mapsto Re^{it},$

$\gamma_3 : [-R,-\varepsilon]\to G,\ t\mapsto t,$

$\gamma_4 : [0,\pi]\to G,\ t\mapsto -\varepsilon e^{-it}.$



Dann ist nach dem Integralsatz $\int_\gamma f(z)\,dz=0$, und für die einzelnen Beiträge haben wir

$$\int_{\gamma_1}+\int_{\gamma_3} f(z)\,dz = \int_{-R}^{-\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{R} -i\cdot\frac{1}{t}\left(\cos(t)+i\sin(t)\right)dt$$

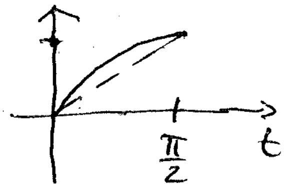
$$= \int_{\varepsilon\le|t|\le R}\frac{\sin(t)}{t}\,dt \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(t)}{t}\,dt \quad \begin{pmatrix}\varepsilon\to 0\\ R\to\infty\end{pmatrix};$$

$$\int_{\gamma_2} f(z)\,dz = -i\int_0^\pi \underbrace{\frac{1}{Re^{it}}}_{=\frac{1}{\gamma_2(t)}}\cdot\underbrace{e^{iRe^{it}}}_{=e^{i\gamma_2(t)}}\cdot\underbrace{R\cdot i\cdot e^{it}}_{=\gamma_2'(t)}\,dt$$

$$= \int_0^\pi e^{iR(\cos(t)+i\sin(t))}\,dt,\quad \text{so dass}$$

$$\left|\int_{\gamma_2} f(z)\,dz\right| \le \int_0^{\pi} e^{-R\sin(t)}\,dt = 2\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin(t)}\,dt .$$

Nun ist auf $(0,\frac{\pi}{2})$: $\sin(t) \ge \frac{2}{\pi}\cdot t$,



also

$$\left|\int_{\gamma_2} f(z)\,dz\right| \le 2\cdot\int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2R}{\pi}t}\,dt \le \frac{\pi}{R} \longrightarrow 0 \ (R\to\infty).$$

Schließlich

$$\int_{\gamma_4} f(z)\,dz = -i\int_0^{\pi} \frac{1}{-\varepsilon e^{-it}}\cdot e^{-i\varepsilon e^{-it}}\cdot(-\varepsilon)(-i)\cdot e^{-it}\,dt$$

$$= -\int_0^{\pi} e^{-i\varepsilon e^{-it}}\,dt \longrightarrow -\int_0^{\pi} dt = -\pi ,$$

da $\lim_{\varepsilon\to 0} e^{-i\varepsilon\cdot e^{-it}} = 1$ mit gleichmässiger Konvergenz in $t\in[0,\pi]$. Insgesamt also

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to\infty}} \int_{\varepsilon\le|t|\le R} \frac{\sin(t)}{t}\,dt = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_4} f(z)\,dz = +\pi ,$$

wie behauptet.

(Ähnliche Beispiele werden wir in den Übungen diskutieren.)

Mit unserer zweiten Anwendung nehmen wir gleich Anlauf zum nächsten Abschnitt, in dem es um die Cauchy'sche Integralformel gehen wird:

Lemma 2: Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f: \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, $\xi_0 \in \Omega$ und $r > 0$, so dass $\overline{B_r(\xi_0)} \subset \Omega$. Dann gilt für jedes $z \in B_r(\xi_0)$

$$\int_{\partial B_r(\xi_0)} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = f(z) \int_{\partial B_r(\xi_0)} \frac{d\xi}{\xi - z}.$$

(Hierbei muss die Umlaufrichtung in beiden Integralen dieselbe sein.)

Bew.: Sei $\varepsilon > 0$ so klein, dass $B_{r+\varepsilon}(\xi_0) \subset \Omega$. Dann ergibt der Integralsatz, angewendet mit $G = B_{r+\varepsilon}(\xi_0)$ und

$$\tilde{f}(\xi) := \begin{cases} \dfrac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} & : \xi \neq z \\ f'(z) & : \xi = z \end{cases},$$

dass $\int_{\partial B_r(\xi_0)} \tilde{f}(\xi)\, d\xi = 0$. (Dabei ist zu beachten, dass wegen der Holomorphie von f die Funktion $\tilde{f}$ in allen $\xi \neq z$ ebenfalls holomorph und in $\xi = z$ stetig ist.) $\square$