9. Weitere Folgerungen aus der Cauchyschen Integralformel

9.1 Die Cauchyschen Ungleichungen und der Konvergenzsatz von Weierstraß

Satz 1: Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f: \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, $\overline{B_r(z_0)} \subset \Omega$, $z \in B_r(z_0)$ und $\delta := \operatorname{dist}(z, \partial B_r(z_0))$.

Dann gilt:

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{r\, n!}{\delta^{n+1}} \|f\|_{\partial B_r(z_0)}.$$

Bew.: Nach der Cauchyschen Integralformel ist

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)^+} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} \, d\xi.$$

Den Integranden können wir abschätzen durch

$$\left| \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} \right| \leq \frac{1}{\delta^{n+1}} \sup\{|f(\xi)| : \xi \in \partial B_r(z_0)\} = \frac{\|f\|_{\partial B_r(z_0)}}{\delta^{n+1}}.$$

Da die Länge des Kreisrandes gerade $2\pi r$ ist, folgt die Beh. aus der Standardabschätzung. □

Bem.: Den Fall $z = z_0$ (mit $\delta = r$ und $|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{r^n} \|f\|_{\partial B_r(z_0)}$) haben wir bereits in Abschnitt 8 zur Abschätzung der Taylorkoeffizienten benutzt.

Satz 2 (Konvergenzsatz von Weierstraß): Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $(f_k)_k$ eine Folge holomorpher Funktionen $f_k : \Omega \to \mathbb{C}$, die kompakt gegen $f : \Omega \to \mathbb{C}$ konvergiert. Dann ist auch f holomorph, und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{k\to\infty} f_k^{(n)} = f^{(n)}$$

mit kompakter Konvergenz.

Bew.: (1) Aufgrund der kompakten Konvergenz ist f stetig, insbes. über jeden stückweisen C^1-Weg integrierbar. Ist weiter γ ein Dreiecksweg in Ω, so gilt die Vertauschbarkeit von Integration und Grenzwertbildung, also

$$\lim_{k\to\infty} \int_\gamma f_k(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz.$$

Nun sei das von $\gamma([a,b])$ berandete Dreieck ganz in Ω enthalten. Dann ist wegen der Holomorphie der f_k stets $\int_\gamma f_k(z)\,dz = 0$ und also auch $\int_\gamma f(z)dz = 0$. Nach dem Satz von Morera ist damit f holomorph.

(2) Da mit f_k, f auch f_k', f', f_k'', f'' usw. holomorph sind, genügt es, die kompakte Konvergenz von $f_k' \longrightarrow f'$ $(k \to \infty)$ nachzuweisen. Dazu seien $\overline{B_r(z_0)} \subset \Omega$ und $\delta > 0$ so klein, dass auch

und $\overline{B_{r+\delta}(z_0)} \subset \Omega$. Dann ist aufgrund der Cauchy-
schen Ungleichungen für alle $z \in \overline{B_r(z_0)}$

$$|f_k'(z) - f'(z)| \leq \frac{r+\delta}{\delta^2} \|f - f_k\|_{\partial B_{r+\delta}(z_0)}$$

und damit

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{z \in \overline{B_r(z_0)}} |f_k'(z) - f'(z)| \leq \lim_{k\to\infty} \frac{r}{\delta^2} \|f_k - f\|_{\partial B_r(z_0)} = 0.$$

Da sich jedes kompakte $K \subset \Omega$ mit endlich vielen abgeschlossenen Kugeln überdecken lässt, folgt die kompakte Konvergenz von $f_k' \to f'$. □

9.2 Offenheitssatz und der Satz von der Gebietstreue

Def.: Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Eine Abbildung $f: X \to Y$ heißt offen, wenn für jede offene Teilmenge $\Omega \subset X$ das Bild $f(\Omega)$ offen in (Y, d_Y) ist.

Bem.: (1) $f: (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ ist genau dann offen, wenn gilt: $\forall x \in X, \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$, so dass $B_\delta(f(x)) \subset f(B_\varepsilon(x))$.

Bew.: "$\Rightarrow$" Sei f offen, $x \in X$ und $\varepsilon > 0$. Dann ist $f(B_\varepsilon(x))$ offen und $f(x) \in f(B_\varepsilon(x))$. Also existiert ein $\delta > 0$, so dass $B_\delta(f(x)) \subset f(B_\varepsilon(x))$.

"$\Leftarrow$" Sei $\Omega \subset X$ offen und $y \in f(\Omega)$. Dann existieren $x \in \Omega$ mit $f(x) = y$, $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subset \Omega$ und $\delta > 0$ mit $B_\delta(f(x)) \subset f(B_\varepsilon(x)) \subset f(\Omega)$, also $B_\delta(y) \subset f(\Omega)$. Daher ist $f(\Omega)$ offen.

(2) Ist f bijektiv, so ist die Offenheit von f gleichbedeutend mit der Stetigkeit von f^{-1}.

(3) Hinreichend für die Offenheit von $f: X \to Y$ ist das Bestehen einer Ungleichung $d_Y(f(x), f(x')) \geq \varepsilon_0 d_X(x, x')$ mit einem $\varepsilon_0 > 0$. In diesem Fall ist nämlich f injektiv, d.h. $f: X \to f(X)$ bijektiv, und die angegebene Ungleichung wird zu

$$d_X(f^{-1}(y), f^{-1}(y')) \leq \frac{1}{\varepsilon_0} d_Y(y, y'),$$

also zur Lipschitzstetigkeit von f^{-1}.

Lemma 1: Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $\overline{B_r(z_0)} \subset \Omega$ und $f: \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gelten:

(1) Wenn $|f(z_0)| < \min\{|f(z)| : |z - z_0| = r\}$ ist, so hat f in $B_r(z_0)$ eine Nullstelle.

(2) Ist $\delta := \frac{1}{2} \min\{|f(z) - f(z_0)| : |z - z_0| = r\} > 0$, so gilt $B_\delta(f(z_0)) \subset f(B_r(z_0))$.

Bew.: (1) Wenn f in $B_r(z_0)$ keine Nullstelle hat, also wegen der Vor. $|f(z_0)| < \min\{|f(z)| : |z-z_0| = r\}$ auch in $\overline{B_r(z_0)}$ keine Nullstelle besitzt, dann ist $\frac{1}{f}$ auf einer offenen Menge $\Omega' \supset \overline{B_r(z_0)}$ holomorph und die Cauchy-Ungleichung für $n=0$ impliziert

$$\frac{1}{|f(z_0)|} \leq \max\left\{\frac{1}{|f(z)|} : |z-z_0| = r\right\}$$

und also $|f(z_0)| \geq \min\{|f(z)| : |z-z_0| = r\}$.

(2) Sei $w \in B_\delta(f(z_0))$ vorgelegt, also $|w - f(z_0)| < \delta$, wobei $2\delta = \min\{|f(z)-f(z_0)| : |z-z_0| = r\}$. Dann ist für $z \in \partial B_r(z_0)$

$$|f(z)-w| \geq \underbrace{|f(z)-f(z_0)|}_{\geq 2\delta} - \underbrace{|f(z_0)-w|}_{<\delta} > \delta > |f(z_0)-w|.$$

Also hat $z \mapsto f(z)-w$ auf $B_r(z_0)$ nach (1) eine Nullstelle, so dass $w \in f(B_r(z_0))$. (Da $w \in B_\delta(f(z_0))$ beliebig vorgegeben war, folgt $B_\delta(f(z_0)) \subset f(B_r(z_0))$.) $\square$

Satz 3 (Offenheitssatz): Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph und auf keiner offenen Teilmenge $\Omega' \subset \Omega$ konstant. Dann ist f offen.

Bew.: Seien $z_0 \in \Omega$ und $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann ist zu zeigen: $\exists\, \delta > 0$, sodass $B_\delta(f(z_0)) \subset f(B_\varepsilon(z_0))$.

Da f um z_0 nicht konstant ist, gibt es eine Kreisscheibe $B_r(z_0)$ mit $r < \varepsilon$ und $f(z) \neq f(z_0)$ für alle $z \in \partial B_r(z_0)$.

(Begründung: Andernfalls gäbe es eine Folge $(z_n)_n$ in Ω mit $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$ und $f(z_n) = f(z_0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach dem Identitätssatz für holomorphe Funktionen wäre f auf einer Umgebung von z_0 konstant – ein Widerspruch zur Voraussetzung.)

Wir wählen $\delta = \frac{1}{2} \min \{ |f(z) - f(z_0)| : z \in \partial B_r(z_0) \} > 0$.

Dann ist nach Lemma 1 (2) $B_\delta(f(z_0)) \subset f(B_r(z_0))$ $\subset f(B_\varepsilon(z_0))$. $\square$

Satz 4 (von der Gebietstreue): Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant. Dann ist $f(G)$ ein Gebiet.

Bew.: Da G ein Gebiet ist, ist f aufgrund des Identitätssatzes auf keiner offenen Teilmenge von G konstant, also nach Satz 3 offen. Insbesondere ist $f(G)$ offen. Weiter ist f stetig, so dass auch $f(G)$ wegzusammenhängend und erst recht ein Gebiet ist. $\square$

An dieser Stelle sei erinnert an den Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion (Abschnitt 3, Satz 1):

Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f: \Omega \to f(\Omega) \subset \mathbb{C}$ holomorph und bijektiv, die Umkehrfunktion $f^{-1}: f(\Omega) \to \Omega$ sei stetig und es gelte $f'(z) \neq 0 \ \forall z \in \Omega$. Dann ist auch f^{-1} holomorph und es gilt

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))} \qquad \forall w \in f(\Omega).$$

Nach dem Offenheitssatz können wir hierin die Voraussetzung der Stetigkeit von $f^{-1}: f(\Omega) \to \Omega$ streichen, denn die Offenheit von f ist die Stetigkeit der Umkehrfunktion. Aber auch die Eigenschaft

$$f'(z) \neq 0 \quad \forall z \in \Omega$$

muss nicht vorausgesetzt, sondern kann gefolgert werden.

Begründung: Sei $N(f') = \{z \in \Omega : f'(z) = 0\}$. Dann besitzt (113)
$N(f')$ keinen inneren Punkt, denn in einer Umgebung eines solchen wäre f konstant, was der vorausgesetzten Injektivität widerspricht. $N(f')$ hat in Ω auch keinen Häufungspunkt, denn nach dem Identitätssatz würde dieser wiederum eine Umgebung besitzen, auf der f konstant ist. Dann ist also

$$f^{-1} : f(\Omega) \longrightarrow \Omega$$

stetig und auf $f(\Omega) \setminus f(N(f'))$ holomorph, wobei $f(N(f'))$ in $f(\Omega)$ keinen Häufungspunkt besitzt. Nach der Folgerung aus dem Satz von Morera ist $f^{-1} : f(\Omega) \to \Omega$ holomorph und die Kettenregel ergibt

$$f^{-1\,\prime}(f(z)) = \frac{1}{f'(z)} \quad \forall z \in \Omega,$$

was $f'(z) = 0$ für alle $z \in \Omega$ ausschließt.

Wir können den Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion also in der folgenden Weise verbessern:

Satz 5: Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f : \Omega \to f(\Omega) \subset \mathbb{C}$ holomorph und bijektiv. Dann ist $f(\Omega)$ offen und f biholomorph. Für die Ableitung der Umkehrfunktion $f^{-1} : f(\Omega) \longrightarrow \Omega$ gilt

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))} \quad \forall w \in f(\Omega)$$

(was die Aussage $f'(z) \neq 0 \ \forall z \in \Omega$ umfasst).

28.05.21

9.3 Das Maximumprinzip

Mit dem Offenheitssatz gelangen wir leicht zu dem folgenden Maximumprinzip für holomorphe Funktionen:

Satz 6: Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f: G \to \mathbb{C}$ holomorph.

(1) Wenn $|f|$ in $z_0 \in G$ ein lokales Maximum besitzt, so ist f konstant.

(2) Ist zudem G beschränkt und $f \in C(\overline{G})$, so gilt

$$\max\{|f(z)| : z \in \overline{G}\} = \max\{|f(z)| : z \in \partial G\},$$

d.h. $|f|$ nimmt ihr Maximum auf ∂G an.

Bew.: (1) Besitzt $|f|$ in $z_0 \in G$ ein lokales Maximum, so gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $|f(z)| \le |f(z_0)|$ für alle $z \in B_\varepsilon(z_0)$. Das heißt

$$f(B_\varepsilon(z_0)) \subset \{w \in \mathbb{C} : |w| \le |f(z_0)|\}.$$

Offenheit von f würde bedeuten: Es gibt ein $\delta > 0$, so dass $B_\delta(f(z_0)) \subset f(B_\varepsilon(z_0))$, was mit dem Vorigen unvereinbar ist – man wähle z.B. $w = f(z_0) + \frac{\delta}{2} \frac{f(z_0)}{|f(z_0)|}$. Also ist nach dem Offenheitssatz $f|_{B_\varepsilon(z_0)}$ konstant, nach dem Identitätssatz f auf G konstant.

Zu (2) nimmt die stetige Funktion $|f|$ auf dem kompakten $\overline{G}$ ein Maximum an. Nehmen wir eine Maximalstelle $z_0 \in G$ an, so folgt aus (1), dass f konstant ist und somit $|f|$ auch auf ∂G ihr Maximum annimmt. □

Anwendung auf $\frac{1}{f}$ ergibt:

Folgerung aus Satz 6: "Minimumprinzip":
Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f: G \to \mathbb{C}$ holomorph.
Dann gelten:

(1) Hat $|f|$ in $z_0 \in G$ ein lokales Minimum, so ist $f(z_0) = 0$ oder f konstant.

(2) Ist zudem G beschränkt und $f \in C(\overline{G})$, so hat f (mindestens) eine Nullstelle in G, oder $|f|$ nimmt ihr Minimum auf ∂G an.

Es gibt noch einen zweiten Weg zum Maximumprinzip, der ein wenig aufwändiger ist, aber auch eine etwas allgemeinere Aussage liefert. Dazu sei erinnert an die Mittelwerteigenschaft, hier in Form einer

Def.: Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f: \Omega \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Wir sagen, f hat die <u>Mittelwerteigenschaft (MWE)</u>, wenn f stetig ist und es zu jedem $z_0 \in \Omega$ ein $R > 0$ gibt, so dass für alle $r \in (0, R)$ gilt

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r e^{it})\, dt. \qquad (116)$$

Bereits gesehen haben wir, dass jede holomorphe, jede antiholomorphe und damit auch der Real- und der Imaginärteil einer jeden holomorphen Funktion die MWE besitzt.

Satz 7: Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f: \Omega \to \mathbb{C}$ eine Funktion mit MWE und es gelte

(1) f ist reellwertig und besitzt in $z_0 \in \Omega$ ein lokales Extremum; <u>oder</u>

(2) $|f|$ besitzt in $z_0 \in \Omega$ ein lokales Max..

Dann ist f auf einer Umgebung $B_\varepsilon(z_0)$ konst.. Ist ferner Ω ein Gebiet und handelt es sich bei z_0 um eine globale Extremstelle, so ist f auf Ω konstant.

Bew.: Es gelte (1) und bei dem Extremum handele es sich o.E. um ein lokales Maximum. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass

- $f(z_0) \geq f(z) \quad \forall z \in B_\varepsilon(z_0)$ und
- $f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\,dt \quad \forall r \in (0, \varepsilon)$.

Dann ist für alle $r \in (0, \varepsilon)$

$$0 = \int_0^{2\pi} f(z_0) - f(z_0 + re^{it})\,dt,$$

wobei der Integrand nirgends negativ und stetig ist. Hieraus folgt

$$f(z_0) = f(z_0 + re^{it}) \quad \forall r \in (0, \varepsilon), \forall t \in [0, 2\pi]$$

und damit $f(z_0) = f(z) \quad \forall z \in B_\varepsilon(z_0)$.

Nun gelte (2). Falls $f(z_0) = 0$ ist, ist $|f(z)| = 0$ und damit $f(z) = 0$ in einer Umgebung von z_0. Andernfalls definieren wir

$$\tilde{f}(z) := \frac{f(z)}{f(z_0)}.$$

Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $\forall z \in B_\varepsilon(z_0)$:

$$|\tilde{f}(z)| \leq |\tilde{f}(z_0)| = \tilde{f}(z_0) = 1.$$

Wir zerlegen $\tilde{f} := g + ih$ mit reellwertigen Funktionen g und h. Dann hat auch g die MWE und nimmt in z_0 mit $g(z_0) = 1$ auf $B_\varepsilon(z_0)$ ein Maximum an. Dann ist nach (1) $g(z) = 1$ auf $B_\varepsilon(z_0)$. (Der Bew. von (1) zeigt, dass man ε nicht verkleinern muss.) Hieraus folgt für alle $z \in B_\varepsilon(z_0)$:

$$h(z) = 0, \quad \tilde{f}(z) = 1 \quad \text{und} \quad f(z) = f(z_0).$$

Für den Zusatz definiert man

$$M := \{ z \in \Omega : f(z) = \max\{ f(w) : w \in \Omega \} \} \quad \text{bzw.}$$

$$M := \{ z \in \Omega : |f(z)| = \max\{ |f(w)| : w \in \Omega \} \}.$$

Dann ist M

- nach Vor. $\neq \emptyset$,
- aufgrund des bisher gezeigten offen und
- wegen der Stetigkeit von f bzw. $|f|$ abgeschlossen.

Da Ω hier ein Gebiet, also zusammenhängend ist, folgt $M = \Omega$.

Folgerung: Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet und $f \in C(\overline{G})$ eine Funktion mit MWE. Dann gelten:

(1) Ist f reellwertig, so nimmt f ~~auf~~ ∂G ihr

Maximum und ihr Minimum an.

(2) Ist f komplexwertig, so nimmt $|f|$ ihr Maximum auf ∂G an.

Bew.: Da $\overline{G}$ kompakt und f stetig ist, werden die globalen Extrema in Punkten $z_0 \in \overline{G}$ angenommen. Falls $z_0 \in G$, ist f nach Satz 7 konstant und hat also auf ∂G denselben Wert.

9.4 Ganze Funktionen und Polynome

Hier beginnen wir mit einer elementaren Abschätzung zum Wachstum von Polynomen:

Lemma 2: Es sei $P: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ ein Polynom vom Grad $\deg P = n$. Dann gilt für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq 1$

$$|P(z)| \leq \left(\sum_{k=0}^{n} |a_k| \right) |z|^n .$$

Ferner gibt es zu jedem $\varepsilon \in (0,1)$ ein $S_\varepsilon \geq 1$, so dass für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq S_\varepsilon$

$$(1-\varepsilon)|a_n||z|^n \leq |P(z)| \leq (1+\varepsilon)|a_n||z|^n .$$

Alle Nullstellen von P befinden sich im abgeschlossenen Kreis $\overline{B_R(0)}$, wobei

$$R = \max\left(1, \frac{1}{|a_n|} \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\right).$$

Bew.: Für $|z| \geq 1$ haben wir

$$|P(z)| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k||z|^k \leq \left(\sum_{k=0}^{n} |a_k|\right)|z|^n.$$

Weiter ist

$$|P(z)| = |a_n||z|^n \cdot \left|1 + \frac{1}{a_n} \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^{k-n}\right|$$

und für $|z| \geq \varrho_\varepsilon := \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{|a_n|} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|$ gilt

$$\left|\frac{1}{a_n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^{k-n}\right| \leq \frac{1}{\varrho_\varepsilon |a_n|} \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| = \varepsilon,$$

so dass

$$(1-\varepsilon)|a_n||z|^n \leq |P(z)| \leq (1+\varepsilon)|a_n||z|^n.$$

Insbes. ist $|P(z)| > 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq 1$ und der Eigenschaft: $\exists\, \varepsilon \in (0,1)$, so dass $|z| \geq \frac{1}{\varepsilon |a_n|} \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|$, also für alle $z \in \mathbb{C}$ mit

$$|z| > \max\left(1, \frac{1}{|a_n|} \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\right). \qquad \square$$

Umgekehrt können wir mit Hilfe der Cauchyschen Ungleichungen zeigen, dass jede ganze (d.h. auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe) Funktion, die nur wie ein Polynom wächst, bereits ein Polynom ist.

Genauer:

Satz 8: Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion. Es gebe $R, M > 0$ und ein $n \in \mathbb{N}$, so dass

$$|f(z)| \leq M\,|z|^n \qquad \forall\, z \in B_R(0)^c.$$

Dann ist f ein Polynom vom Grad $\deg f \leq n$.

__Bew.__: Sei $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ die Taylorentwicklung von f um $z_0 = 0$. Dann gilt aufgrund der Cauchyschen Ungleichungen für $k \in \mathbb{N}_0$ und $r \geq R$:

$$|a_k| \leq \frac{1}{r^k} \max\{|f(z)| : |z| = r\} \leq M \cdot r^{n-k}$$

Für $k > n$ ergibt sich mit $\lim_{r\to\infty}$: $|a_k| = 0$, also

$f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, d.h. f ist ein Polynom und $\deg f \leq n$. $\square$

Der spezielle Fall $n = 0$ dieses Satzes wird häufig benutzt und erhält einen eigenen Namen:

Satz von __Liouville__: Jede beschränkte ganze Funktion ist konstant.

Mit Hilfe des Satzes von Liouville zeigen wir den

Fundamentalsatz der Algebra: Es sei

$$P:\mathbb{C}\to\mathbb{C},\ z\mapsto P(z)=\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

ein Polynom vom Grad $n\geq 1$. Dann gelten:

(1) P hat eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

(2) Es gibt Nullstellen $z_1,\dots,z_n$ von P (möglicherweise einige davon identisch), so dass für alle $z\in\mathbb{C}$ $P(z)=a_n\cdot\prod_{k=1}^{n}(z-z_k)$.

Bew.: (1) Nehmen wir an, P habe keine Nullstellen in $\mathbb{C}$, dann ist $\frac{1}{P}$ eine ganze Funktion. Nach Lemma 2 ist $\lim\limits_{|z|\to\infty}\frac{1}{P(z)}=0$ und daher $\frac{1}{P}$ beschränkt, also konstant nach dem Satz von Liouville. Es folgt: P ist konstant, und das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung.

(2) erhält man per Induktion über n. Für $n=1$ ist $P(z)=a_1z+a_0=a_1\left(z-\left(\frac{-a_0}{a_1}\right)\right)$. Für den Induktionsschluss ($n-1\to n$) finden wir mit Teil (1) ein $z^*\in\mathbb{C}$ mit $P(z^*)=0$. Dann ist

$$Q(z):=P(z):(z-z^*)$$

ein Polynom vom Grad $n-1$ mit führendem

Koeffizienten a_n, besitzt also nach Induktionsvoraussetzung eine Darstellung

$$Q(z) = a_n \prod_{j=1}^{n-1} (z - z_j),$$

wobei die z_j Nullstellen von Q und damit auch von P sind. Nun ist wie behauptet

$$P(z) = a_n \cdot \left(\prod_{j=1}^{n-1} (z - z_j) \right) (z - z^*). \qquad \square$$

Bem.: Es ist üblich, Linearfaktoren mit denselben z_j zusammenzufassen zu

$$P(z) = a_n \prod_{j=1}^{k} (z - z_j)^{n_j},$$

wobei $k \le n$, $n_j \in \mathbb{N}$ und $\sum_{j=1}^{k} n_j = n$. Dann wird n_j als Vielfachheit der Nullstelle z_j bezeichnet.