10. Der allgemeine Cauchysche Integralsatz

10.1 Eine "Homotopieversion" [1] des Integralsatzes

Im Abschnitt 6 haben wir den Cauchyschen Integralsatz

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

unter den folgenden Voraussetzungen gezeigt:

(1) f ist stetig und mit Ausnahme endlich vieler Punkte holomorph.

(2) Der Definitionsbereich G von f ist ein sternförmiges Gebiet.

(3) γ ist ein geschlossener, stückweiser C^1-Weg.

(1) ist zweifellos wesentlich. Die Voraussetzung der Sternförmigkeit in (2) ist hingegen beweistechnischer Art. Allerdings ist auch schon klar, dass die Aussage nicht für beliebige Gebiete gelten kann: Wählen wir etwa $G := B_2(0) \setminus \overline{B_{\frac{1}{2}}(0)}$, so ist die Funktion $f(z) = \frac{1}{z}$ in G holomorph, aber für den einfach geschlossenen Weg

$$\gamma : [0, 2\pi] \to G, \quad t \mapsto \gamma(t) = e^{it}$$

---

1) Bez. aus dem Lehrbuch von Freitag + Busam

ist $\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \neq 0.$

Hier soll die Voraussetzung der Sternförmigkeit jedenfalls abgeschwächt werden. Schließlich scheint die Bedingung "stückweise C^1" an den Weg γ in (3) schwer verzichtbar, wenn wir an die Definition

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$$

des Wegintegrals denken. Will man beliebige stetige Funktionen über eine Kurve γ integrieren, so benötigt man zumindest deren Rektifizierbarkeit, das ist die Approximierbarkeit (ihrer Länge) durch Polygone. Für holomorphe Integranden kann man jedoch auf eine genaue Approximation verzichten – es soll ja ohnehin dasselbe herauskommen, wie beim Integral über einen "benachbarten" stückweisen C^1-Weg mit demselben Anfangs- und Endpunkt. Diese Überlegung ermöglicht es, das Integral holomorpher Funktionen über lediglich stetige Wege in sinnvoller Weise zu erklären.

Lemma 1: Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $\gamma : [a,b] \to \Omega$ ein (stetiger) Weg. Dann existieren eine Zerlegung

$$Z := \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\} \text{ von } [a,b]$$

und ein $\varepsilon_0 > 0$, so dass

(1) $B_{\varepsilon_0}(\gamma(t_k)) \subset \Omega \quad \forall k \in \{0, \dots, n\}$ und

(2) $\gamma([t_k, t_{k+1}]) \subset B_{\varepsilon_0}(\gamma(t_k)) \cap B_{\varepsilon_0}(\gamma(t_{k+1})) \quad \forall k \in \{0, \dots, n-1\}$.

Ist $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, so hängt der Wert des Integrals $I(\gamma, f) := \int_{[\gamma(t_0), \dots, \gamma(t_n)]} f(z)\,dz$

nicht von der Zerlegung Z ab. Ist γ stückweise C^1, so ist $I(\gamma, f) = \int_\gamma f(z)\,dz$.

Bew.: Da $\gamma([a,b])$ kompakt und $\partial\Omega$ abgeschlossen ist, ist

$$\varepsilon_0 := \operatorname{dist}(\gamma([a,b]), \partial\Omega) > 0$$

und für jedes $z \in \gamma([a,b])$ ist $B_{\varepsilon_0}(z) \subset \Omega$.

Da ferner γ gleichmässig stetig ist, existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $s, t \in [a,b]$ mit $|s-t| < \delta$ gilt $|\gamma(s) - \gamma(t)| < \varepsilon_0$. Nun wählen wir eine Zerlegung Z von $[a,b]$ (wie oben) der feinheit $\delta(Z) < \delta$. Dann ist für jedes $s \in [t_k, t_{k+1}]$ sowohl $|\gamma(s) - \gamma(t_k)| < \varepsilon_0$ als auch $|\gamma(s) - \gamma(t_{k+1})| < \varepsilon_0$, wie in (2) behauptet. (127)

Nun seien $Z = \{a = t_0 < \ldots < t_n = b\}$ und $Z' = \{a = s_0 < \ldots < s_m = b\}$ Zerlegungen von $[a,b]$. Da Z und Z' eine gemeinsame Verfeinerung besitzen, können wir o.E. annehmen, dass Z feiner ist als Z', dass also

$$Z' = \{a = t_0 < t_{k_1} < \ldots < t_{k_{m-1}} < t_n = b\}.$$

Dann ist zu zeigen, dass

$$\int_{[\gamma(t_{k_j}), \gamma(t_{k_{j+1}})]} f(z)\,dz = \sum_{l=k_j}^{k_{j+1}-1} \int_{[\gamma(t_l), \gamma(t_{l+1})]} f(z)\,dz.$$

Nun sind alle Strecken in diesen Integralen enthalten in $B_{\varepsilon_0}(\gamma(t_{k_j}))$, wo f holomorph ist. Also folgt diese Gleichheit aus dem Cauchyschen Integralsatz für sternförmige Gebiete (hier $B_{\varepsilon_0}(\gamma(t_{k_j}))$) angewendet auf den geschlossenen Polygon

$$[\gamma(t_{k_j}), \gamma(t_{k_j+1}), \ldots, \gamma(t_{k_{j+1}}), \gamma(t_{k_j})].$$

Ist $\gamma : [a,b] \to \Omega$ stückweise C^1 und $Z = \{a = t_0 < \ldots < t_n = b\}$ eine Zerlegung wie oben, so zeigt der Cauchysche Integralsatz ebenso, dass für alle $k \in \{0, \ldots, n-1\}$

$$\int_{[\gamma(t_k),\gamma(t_{k+1})]} f(z)\,dz = \int_{\gamma|_{[t_k,t_{k+1}]}} f(z)\,dz.$$

Summation über k ergibt $I(\gamma,f) = \int_\gamma f(z)\,dz$. $\square$

<u>Def.</u>: Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f:\Omega\to\mathbb{C}$ holomorph und $\gamma:[a,b]\to\Omega$ ein stetiger Weg. Dann heißt

$$\int_\gamma f(z)\,dz := I(\gamma,f)$$

mit $I(\gamma,f)$ wie in Lemma 1 das <u>Integral von f über γ</u>.

<u>Bem.</u>: Der Cauchysche Integralsatz vererbt sich auf geschlossene, <u>lediglich stetige</u> Wege γ, die in einem sternförmigen Gebiet G verlaufen. In dieser Situation gilt also für jede holomorphe Funktion $f: G\to\mathbb{C}$, dass

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Nun seien $Q=[0,1]\times[0,1]$, $\Omega\subset\mathbb{C}$ offen und $H: Q\to\Omega$ stetig. Dann wird ~~der Rand $\partial(H(Q))$~~ das Bild $H(\partial Q)$ des ~~Bildes~~ Randes in natürlicher Weise parametrisiert durch $\gamma_{H,Q}:[0,4]\to\Omega$, definiert als

$$\gamma_{H,Q}(t) := \begin{cases} H(t,0) & : 0 \leq t \leq 1 \\ H(1,t-1) & : 1 \leq t \leq 2 \\ H(3-t,1) & : 2 \leq t \leq 3 \\ H(0,4-t) & : 3 \leq t \leq 4. \end{cases}$$

Entsprechend für Quadrate anderer Kantenlänge oder etwas allgemeiner auch für Rechtecke.

Lemma 2: Für Q, $H \colon Q \to \Omega$, $\gamma_{H,Q}$ wie oben und jede holomorphe Funktion $f: \Omega \to \mathbb{C}$ gilt

$$\int_{\gamma_{H,Q}} f(z)\,dz = 0.$$

Bew.: Da Q kompakt und $H: Q \to \Omega$ stetig sind, ist auch $H(Q)$ kompakt und daher $\varepsilon_0 := \operatorname{dist}(H(Q), \partial\Omega) > 0$. Ferner ist H gleichmäßig stetig, also existiert ein $\delta > 0$, so dass $|H(z) - H(w)| < \varepsilon_0$ für alle $z, w \in Q$ mit $|z - w| < \delta$. Nun wählen wir $n > \frac{1}{\delta}$ und zerlegen

$$Q = \bigcup_{1 \leq k, l \leq n} Q_{kl}$$

mit abgeschlossenen Quadraten $Q_{k,l}$ der Kantenlänge $\frac{1}{n}$. Die Mittelpunkte der Quadrate seien mit z_{kl} bezeichnet und $w_{k,l} := H(z_{kl})$. Dann ist $H(Q_{kl}) \subset B_{\varepsilon_0}(w_{k,l}) \subset \Omega$ und der Cauchysche Integralsatz ergibt

$$\int_{\gamma_{H,Q_{kl}}} f(z)\,dz = 0.$$

Da sich die Beiträge zu diesen Integralen, die aus dem Innern von Q stammen, gerade aufheben, folgt

$$\int_{\gamma_{H,Q}} f(z)\,dz = \sum_{k,l=1}^{n} \int_{\gamma_{H,Q_{kl}}} f(z)\,dz = 0. \qquad \square$$

Def.: Es sei (X,d) ein metrischer Raum.

(a) Zwei Wege $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to X$ heißen <u>homotop in X</u>, wenn es eine stetige Abbildung

$$H : [0,1] \times [0,1] \to X, \quad (t,s) \mapsto H(t,s)$$

gibt, sodass $\gamma_0(t) = H(t,0)$ und $\gamma_1(t) = H(t,1)$ für alle $t \in [0,1]$.

(b) γ_0 und γ_1 heißen <u>homotop bei festen Endpunkten</u>, wenn zusätzlich für alle $s \in [0,1]$

$$\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = H(0,s) \quad \text{und} \quad \gamma_0(1) = \gamma_1(1) = H(1,s).$$

(c) Ein geschlossener Weg $\gamma_0 : [0,1] \to X$ heißt <u>nullhomotop</u> (in X), wenn er zu einem konstanten Weg ("Nullweg") (in X) homotop ist.

(d) Ein wegzusammenhängender Raum (X,d) heißt <u>einfach zusammenhängend</u>, wenn jeder geschlossene Weg in X nullhomotop ist.

Bem. und Bsp.: (1) In unseren Anwendungen wird stets (X, d) eine offene Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{C}$ (evtl. $\subset \mathbb{R}^n$) mit der Euklidischen Metrik sein.

(2) Die Abbildung H in dieser Def. heißt eine <u>Homotopie</u>. Sind die Wege γ_0, γ_1 auf einem Intervall $[a,b]$ definiert und entsprechend $H : [a,b] \times [c,d] \to X$ stetig mit $\gamma_0(t) = H(t,c)$, $\gamma_1(t) = H(t,d)$ $\forall t \in [a,b]$, so bezeichnet man H ebenfalls als eine Homotopie.

(3) Setzt man $\gamma_s(t) := H(t,s)$, erhält man eine Kurvenschar $(\gamma_s)_{s \in [0,1]}$, so dass γ_0 beim Übergang von $s = 0$ zu $s = 1$ stetig in γ_1 deformiert wird; im Teil (b) bei festgehaltenem Anfangs- und Endpunkt.

(4) In einem konvexen Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ (oder, etwas allgemeiner, $G \subset \mathbb{R}^n$) sind je zwei Kurven $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to G$ in G homotop. Eine Homotopie ist gegeben durch

$$H(t,s) = (1-s)\gamma_0(t) + s\gamma_1(t).$$

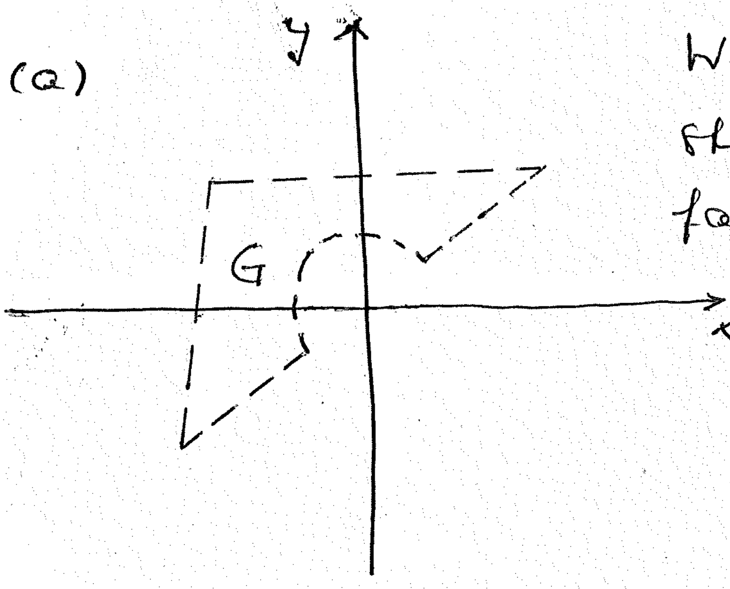
Insbesondere ist jedes konvexe Gebiet einfach zusammenhängend.

(5) Ist $G \subset \mathbb{C}$ (oder $G \subset \mathbb{R}^2$) sternförmig mit Zentrum $z_0 \in G$, so ist G ebenfalls einfach zusammenhängend, denn durch

$$H(t,s) = (1-s)\gamma(t) + s z_0$$

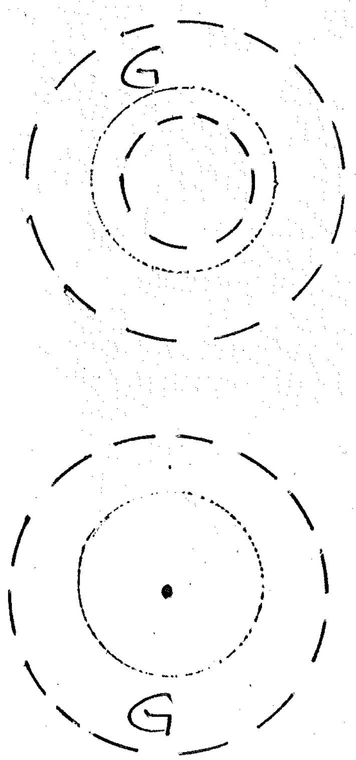
ist eine Homotopie zwischen einem beliebigen Weg γ und dem Nullweg $[z_0]$ gegeben.

(6) (a)



Weder konvex, noch sternförmig, aber einfach zusammenhängend.

(b)



Zusammenhängend, aber nicht einfach zusammenhängend, denn  lässt sich nicht stetig in einen Punkt des Gebietes G zusammenziehen.

Satz 1 (Cauchyscher Integralsatz, Homotopieversion): Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gelten:

(1) Sind $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to \Omega$ zwei in Ω homotope Wege mit festen Endpunkten $\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ und $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$. Dann ist

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz.$$

(2) Ist $\gamma : [0,1] \to \Omega$ ein geschlossener, in Ω nullhomotoper Weg, so ist

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

Bew.: (1) Sei $H : [0,1] \times [0,1] \to \Omega$ eine Homotopie mit $H(t,0) = \gamma_0(t)$ und $H(t,1) = \gamma_1(t)$. Dann ist nach Lemma 2

$$0 = \int_{\gamma_{H,Q}} f(z)dz = \int_{\gamma_0} f(z)dz + \int_{\gamma_1^-} f(z)dz$$

und daher $\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz$.

(2) Ebenso, wenn $\gamma(0) = \gamma(1) = z_0 = H(t,1) \; \forall t \in [0,1]$ mit γ statt γ_0 und $\gamma_1 = [z_0]$. Andernfalls muss man noch zwei Wege hinzufügen, deren Beiträge sich zu Null addieren. $\square$

Folgerung: Sei $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $f: G \to \mathbb{C}$ holomorph.

(1) Für jeden geschlossenen Weg γ in G ist

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

(2) f besitzt in G eine Stammfunktion.

Bew.: Nur (2) bedarf der Begründung: Man fixiert $z_0 \in G$ und wählt zu $z \in G$ einen Weg γ_z in G mit $\gamma_z(0) = z_0$ und $\gamma_z(1) = z$. Nach Teil (1) des Satzes ist

$$F(z) := \int_{\gamma_z} f(w)\,dw$$

unabhängig von der Wahl des Weges γ_z und daher wohldefiniert. Für den Differenzenquotienten hat man, wenn $|h|$ ausreichend klein ist

$$\frac{1}{h}(F(z+h) - F(z)) = \frac{1}{h} \int_{[z, z+h]} f(w)\,dw \xrightarrow[h \to 0]{} f(z)$$

wie im Lemma 1 von Abschnitt 6 (dort war G sternförmig!). $\square$

Anwendung: Harmonische Funktionen

Eine C^2-Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ heißt harmonisch, wenn

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4 \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z} \partial z} = 0 \qquad \text{ist.}$$

Bereits gesehen haben wir: Ist $f = u + iv : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, so sind $f, \bar{f}, u$ und v harmonisch. Jetzt können wir uns klar machen, dass damit auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet bereits alle harmonischen Funktionen gefunden sind. Es gilt:

Satz 2: Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $u \in C^2(G)$ harmonisch. Dann gibt es eine holomorphe Funktion $F : G \to \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} F = u$.

Bew.: Wir setzen $f := 2 \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}$. Dann ist

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z} \partial z} = \frac{1}{2} \Delta u = 0 .$$

Also ist f holomorph und besitzt nach der Folgerung aus Satz 1 eine Stammfunktion

$$F = U + iV : G \to \mathbb{C}$$

Hierfür gilt

$$f(z) = F'(z) = \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)(U + iV)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial x} - i\frac{\partial U}{\partial y} + i\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y},$$

letzteres aufgrund der Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichungen. Also ist $\nabla u = \nabla U$ und damit $u = U + c$ mit einer reellen Konstante c, d.h.

$u = \mathrm{Re}(F + c)$. $\square$

Folgerungen: (1) Ist $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $u : \Omega \to \mathbb{R}$ harmonisch, so ist auf jeder Kreisscheibe $B \subset \Omega$ u der Realteil einer holomorphen Funktion $F : B \to \mathbb{C}$. Insbes. hat u die Mittelwerteigenschaft und damit gilt das Maximumprinzip (Abschnitt 9.3, Satz 7 und die Folgerung daraus) für harmonische Funktionen.

(2) Auch andere Ergebnisse über holomorphe Funktionen werden auf diese Weise an harmonische Funktionen vererbt, z. B. der Satz von Liouville: Ist $u : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ eine beschränkte harmonische Funktion, so ist u konstant. Der einfache Beweis sei als Übungsaufgabe gestellt.