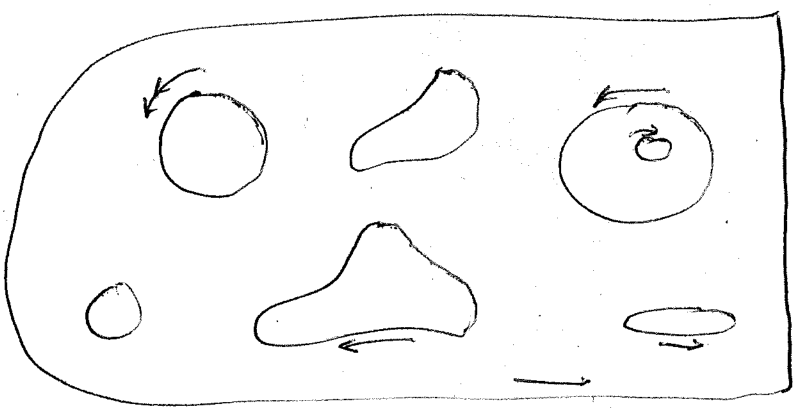
10.2 Ketten, Zyklen, Umlaufzahlen

Der nächste Schritt der Verallgemeinerung ist es, über Systeme von Wegen zu integrieren, die

- sich nicht zu <u>einem</u> Weg zusammensetzen lassen, und die
- ggf. teilweise mehrfach und mit verschiedenen Orientierungen durchlaufen werden.

z. B. wollen wir über den Rand einer solchen



löchrigen Käsescheibe (oder komplizierterer Gebiete) integrieren. Dazu sollen <u>endlich viele</u> (i. Allg. nicht zusammenhängende) Wege $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ unter Beachtung von Vielfachheiten und Laufrichtungen zu einem Wegesystem Γ – einer sogenannten <u>Kette</u> – zusammengefasst werden. Das läuft darauf hinaus, Linearkombinationen

$$\Gamma := \sum_{k=1}^{n} n_k \gamma_k \qquad (*)$$

von Wegen mit ganzzahligen Koeffizienten n_k zu bilden. Um dies in einer Definition fassen zu können, nehmen wir wie üblich Zuflucht zum Begriff der Abbildung:

<u>Def.</u>: Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Eine <u>Kette</u> Γ in Ω ist eine Abbildung von der Menge aller stetigen Wege in Ω nach $\mathbb{Z}$, die nur endlich vielen Wegen einen Wert $\neq 0$ zuweist.

Die Addition in $\mathbb{Z}$ induziert dann eine "punktweise" definierte Addition von Ketten

$$(\Gamma_1 + \Gamma_2)(\gamma) := \Gamma_1(\gamma) + \Gamma_2(\gamma)$$

und eine Multiplikation mit einer ganzen Zahl

$$(k\Gamma)(\gamma) := k\,\Gamma(\gamma), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Identifiziert man nun einen einzelnen Weg

$$\gamma : [a,b] \longrightarrow \Omega$$

mit derjenigen Kette Γ, die nur die Werte

$$\Gamma(\gamma) = 1 \quad \text{und} \quad \Gamma(\tilde\gamma) = 0 \quad \forall \tilde\gamma \neq \gamma$$

annimmt, so ist jede Kette eine Linearkombination von Wegen wie in (*).

Mit $(\mathbb{Z}, +)$ ist dann auch

$$(\{\Gamma : \Gamma \text{ ist eine Kette in } \Omega\}, +)$$

eine abelsche Gruppe; das Nullelement ist die Nullabbildung (nicht zu verwechseln mit einem Nullweg!). Das zu einem Weg γ negative Element ist der reziproke Weg γ^-. Schließlich verstehen wir unter dem "Bild" oder der "Spur" einer Kette $\Gamma = \sum_{k=1}^{n} n_k \gamma_k$

$$\text{Bild}(\Gamma) := \bigcup_{\substack{k=1 \\ n_k \neq 0}}^{n} \text{Bild}(\gamma_k).$$

Damit ist die Struktur des Systems aller Ketten in einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{C}$ geklärt. Um beliebige stetige Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{C}$ integrieren zu können, benötigen wir stückweise C^1-Wege bzw. -Ketten:

Def.: Eine Kette $\Gamma = \sum_{k=1}^{n} n_k \gamma_k$ heißt stückweise (von der Klasse) C^1, wenn dies auf alle γ_k mit $n_k \neq 0$ zutrifft. In diesem Fall definieren wir die Länge der Kette als

$$L(\Gamma) := \sum_{k=1}^{n} |n_k| \, L(\gamma_k).$$

Def.: Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $\Gamma = \sum_{k=1}^{n} n_k \gamma_k$ eine Kette in Ω und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ so, dass für alle $k \in \{1, \dots, n\}$ das Integral $\int_{\gamma_k} f(z)\,dz$ erklärt ist. Dann heißt

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz := \sum_{k=1}^{n} n_k \int_{\gamma_k} f(z)\,dz$$

das Integral von f über Γ.

Bem.: (1) Im wesentlichen sind zwei Situationen mit dieser Def. erfasst:

(i) f ist lediglich stetig und Γ von der Klasse C^1 (stückweise) und

(ii) f ist holomorph und Γ eine beliebige Kette in Ω.

(2) Ist $\Gamma = \sum_{k=1}^{n} n_k \gamma_k = \sum_{\ell=1}^{m} m_\ell \eta_\ell$, so gilt

$$\sum_{k=1}^{n} n_k \int_{\gamma_k} f(z)\,dz = \sum_{\ell=1}^{m} m_\ell \int_{\eta_\ell} f(z)\,dz.$$

Das sieht man durch Betrachtung des Integrals von f über eine gemeinsame Verfeinerung $(\xi_{k\ell})_{\substack{1\le k\le n\\ 1\le \ell\le m}}$ von $(\gamma_k)_{1\le k\le n}$ und $(\eta_\ell)_{1\le \ell\le m}$. Damit ist hier eine Wegesystem gemeint mit

$$\text{Bild}(\xi_{k\ell}) = \text{Bild}(\gamma_k) \cap \text{Bild}(\eta_\ell).$$

(Routine!) Damit ist das Integral über eine Kette Γ wohldefiniert.

(3) Aus der Def. folgt

$$\int_{\Gamma_1+\Gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz.$$

(4) Die Standardabschätzung nimmt für die Integration über Ketten die Gestalt

$$\left|\int_\Gamma f(z)\,dz\right| \le L(\Gamma)\, \|f\|_{\text{Bild}(\Gamma)}$$

an, was in vielen Fällen sicherlich eine grobe Verschwendung ist.

~~Def.: Eine Kette Γ heißt geschlossen oder ein Zyklus, wenn es eine Darstellung $\Gamma = \sum_{k=1}^{n} n_k \gamma_k$ mit geschlossenen Wegen γ_k gibt.~~

Def.: Eine Kette $\Gamma = \sum_{k=1}^{n} n_k \gamma_k$ heißt <u>geschlossen</u> oder ein <u>Zyklus</u>, wenn jedes $z \in \mathbb{C}$ unter Berücksichtigung der Vielfachheiten n_k ebenso oft als Anfangs- wie auch als Endpunkt eines γ_k auftritt.

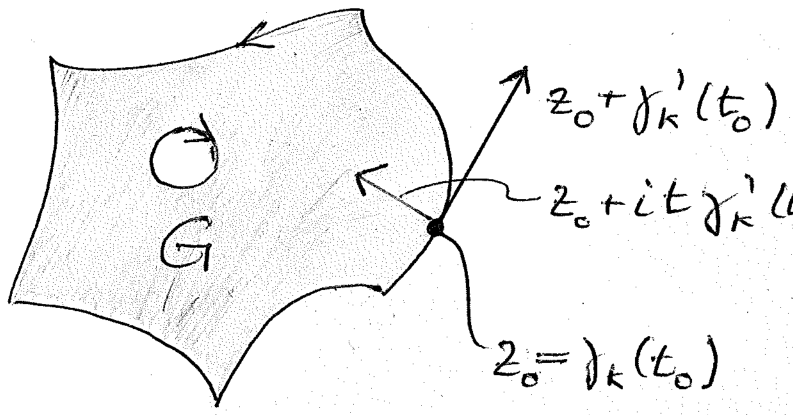
<u>Bsp.</u>: (1) Sind $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ Wege, so dass für alle $k \in \{1, \dots, n-1\}$ der Endpunkt von γ_k mit dem Anfangspunkt von γ_{k+1} und der Endpunkt von γ_n mit dem Anfangspunkt von γ_1 übereinstimmen, so ist $\Gamma = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k$ geschlossen. Das ist insofern der Erwähnung wert, als Γ <u>als Kette nicht identisch</u> ist mit dem geschlossenen Weg $\gamma_1 \oplus \dots \oplus \gamma_n$.

(2) Sind $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ geschlossene Wege, so ist $\Gamma = \sum_{k=1}^{n} n_k \gamma_k$ ein Zyklus. Insbes. sind $\Gamma = 0$ und jeder konstante Weg Zyklen. Relevanter ist der folgende Spezialfall:

(3) Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet und $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ einfach geschlossene Wege mit paarweise disjunkten Bildern, so dass $\partial G = \bigcup_{k=1}^{n} \text{Bild}(\gamma_k)$ ist, so nennt man $\Gamma = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k$ die <u>Randkette</u> (oder den <u>Randzyklus</u>) des Gebietes G. Sind die

dieser Situation alle γ_k stückweise C^1, so sagt man, <u>G liege links von Γ</u> bzw. sei <u>von Γ positiv berandet</u>, wenn folgendes gilt:

Zu jedem $z_0 = \gamma_k(t_0) \in \partial G$ mit $\gamma_k'(t_0) \neq 0$ existiert ein $\delta = \delta(z_0) > 0$, so dass für alle $t \in (0, \delta)$ der "Vektor" $z_0 + it\gamma_k'(t_0) \in G$ ist. ($\gamma_k'(t_0)$ ist der Tangentialvektor an ∂G in z_0 in "Fahrtrichtung". Dieser wird durch Multiplikation



mit $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ um $\frac{\pi}{2}$ nach links gedreht und dadurch zum nach links gerichteten Normalenvektor.)

<u>Def.</u>: Sei Γ ein Zyklus und $z \in \mathbb{C} \setminus \text{Bild}(\Gamma)$. Dann ist die <u>Umlaufzahl</u> von Γ bezüglich z definiert als

$$n(\Gamma, z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{d\xi}{\xi - z}.$$

Bem. und Bsp.: (1) Für alle $z \notin \text{Bild}(\Gamma_1) \cup \text{Bild}(\Gamma_2)$ ist

$$n(\Gamma_1 + \Gamma_2; z) = n(\Gamma_1, z) + n(\Gamma_2, z),$$

insbes. für $z \notin \text{Bild}(\Gamma_1)$

$$n(-\Gamma_1, z) = -n(\Gamma_1, z).$$

(2) Es seien $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$, $m \in \mathbb{N}$ und

$$\gamma_m : [0, 2\pi m] \to \mathbb{C},\ t \mapsto \gamma_m(t) := z_0 + re^{it}.$$

Dann ist $\int_{\gamma_m} f(z)\,dz = m \int_{\gamma_1} f(z)\,dz$ und daher

für $z \in B_r(z_0)$ aufgrund der Cauchy-Integralformel

$$n(\gamma_m, z) = m\, n(\gamma_1, z) = \frac{m}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{d\xi}{\xi - z} = m.$$

Das entspricht der geometrischen Vorstellung, dass z von γ_m m-mal umlaufen wird. Im Einklang damit steht, dass für $z \in \overline{B_r(z_0)}^c$ (das ja nicht "umlaufen" wird) nach dem Cauchyschen Integralsatz gilt

$$n(\gamma_m, z) = 0.$$

(3) Sei $\gamma_R^{\pm}(t) = z_0 + Re^{\pm it}$ mit $z_0 \in \mathbb{C}$, $R > 0$ und $t \in [0, 2\pi]$. Dann ist $\gamma_R^{\pm}$ ein geschlossener Weg,

und für $0<r<R$ erhalten wir mit

$$\Gamma = \gamma_R^+ + \gamma_r^- = \gamma_R^+ - \gamma_r^+$$

einen Zyklus (der kein Weg ist). Aus (2) und der Additivität der Umlaufzahl ergibt sich

$$n(\Gamma, z) = \begin{cases} 0 & \text{für } |z|<r \text{ oder } |z|>R, \\ 1 & \text{für } r<|z|<R. \end{cases}$$

Aufgrund dieser Bspe. ist plausibel, dass die Umlaufzahl $n(\Gamma, z)$ misst, wie oft der Zyklus Γ einen Punkt $z \in \mathbb{C}$ umläuft. Dazu muss $n(\Gamma, z) \in \mathbb{Z}$ sein, was wir zuerst überprüfen sollten.

<u>Satz</u> 3: Es sei Γ ein Zyklus. Dann gelten:

(1) Für jedes $z \notin \text{Bild}(\Gamma)$ ist $n(\Gamma, z) \in \mathbb{Z}$.

(2) Die Abbildung $z \mapsto n(\Gamma, z)$ ist stetig.

<u>Bew.</u>: (1) Sei $\Gamma = \sum_{k=1}^{n} n_k \gamma_k$. O.E. können wir annehmen, dass alle $\gamma_k : [0,1] \to \mathbb{C}$ stückweise C^1 sind. Für $t \in [0,1]$ definieren wir

$$h(t) := \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{n} n_k \cdot \int_0^t \frac{\gamma_k'(s)}{\gamma_k(s)-z}\, ds$$

und zeigen, dass $e^{2\pi i h(1)} = 1$ ist. Mit h ist auch

$$g(t) := e^{-2\pi i h(t)} \cdot \prod_{k=1}^{n} (\gamma_k(t) - z)^{n_k}$$

stückweise stetig differenzierbar und es gilt

$$g'(t) = g(t)\left(-2\pi i h'(t) + \sum_{\ell=1}^{n} n_\ell \frac{\gamma_\ell'(t)}{\gamma_\ell(t) - z}\right) = 0.$$

g ist also konstant, es gilt $g(0) = g(1)$ und wegen $h(0) = 0$ heißt das

$$\prod_{k=1}^{n} (\gamma_k(0) - z)^{n_k} = e^{-2\pi i h(1)} \cdot \prod_{k=1}^{n} (\gamma_k(1) - z)^{n_k}.$$

Nun ist Γ ein Zyklus, d.h. wenn $w \in \mathbb{C}$ als Anfangs- und/oder Endpunkt eine γ_k aus Γ auftritt, so ist

$$\sum_{w = \gamma_k(0)} n_k = \sum_{w = \gamma_k(1)} n_k$$

(summiert wird über alle k, so dass $\gamma_k(\ ) = w$.)

Das bedeutet, dass $w - z$ ebenso oft als Faktor ein Produkt links wie ein Produkt rechts auftritt. Beide Produkte sind also identisch und damit $e^{-2\pi i h(1)} = 1$.

(2) Hier reicht es z.z., dass die Abb.

$$z \mapsto \int_{\gamma_k} \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

stetig ist. Nun ist

$$\left| \int_{\gamma_k} \frac{d\xi}{\xi - z} - \int_{\gamma_k} \frac{d\xi}{\xi - w} \right| \leq |z-w| \left| \int_{\gamma_k} \frac{d\xi}{(\xi - z)(\xi - w)} \right|$$

$$\leq |z-w| \, L(\gamma_k) \, \frac{1}{\operatorname{dist}(z, \operatorname{Bild}(\gamma_k))} \cdot \frac{1}{\operatorname{dist}(w, \operatorname{Bild}(\gamma_k))}$$

$$\longrightarrow 0 \quad (w \to z). \qquad \square$$

Um eine naheliegende Folgerung aus Satz 3 ziehen zu können, benötigen wir den folgenden Begriff:

Def.: Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. $z_1, z_2 \in \Omega$ heißen äquivalent, wenn es einen stetigen Weg γ in Ω gibt, der z_1 und z_2 verbindet. Die Äquivalenzklassen von Ω bezüglich dieser Äquivalenzrelation heißen die <u>Zusammenhangs-</u> (oder auch: <u>Weg-</u>) <u>komponenten</u> von Ω.

Folgerung aus Satz 3:

(1) Auf jeder Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus \operatorname{Bild}(\Gamma)$ ist die Abbildung

$$z \longmapsto n(\Gamma, z)$$

konstant.

(2) Auf der unbeschränkten Wegkomponente von $\mathbb{C} \setminus \operatorname{Bild}(\Gamma)$ ist $n(\Gamma, z) = 0$.

Begründung von (2): Da Bild(Γ) kompakt ist, gibt es genau eine unbeschränkte Zusammenhangskomponente. Dass dort $n(\Gamma, z) = 0$ gilt, folgt aus $\lim_{z\to\infty} n(\Gamma, z) = 0$.

Als nächstes zeigen wir, dass sich die Umlaufzahl um 1 erhöht, wenn man einen von links kommenden Weg überquert.

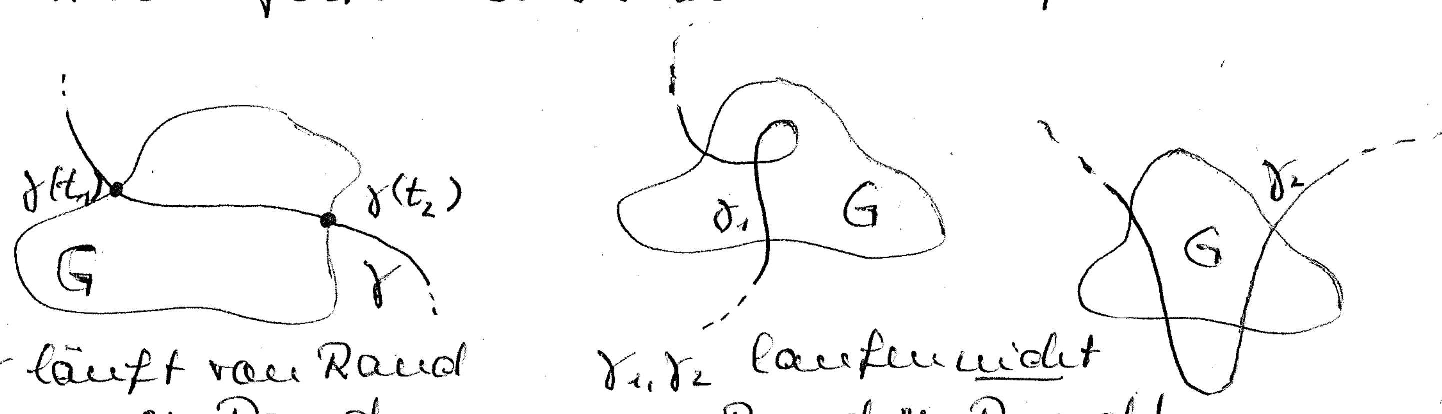
Def. Ein Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ <u>läuft in</u> einem Gebiet <u>$G \subset \mathbb{C}$</u> <u>von</u> <u>Rand</u> <u>zu</u> <u>Rand</u>, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(a) Es existieren $a \le t_1 < t_2 \le b$, so dass $\gamma(t_1)$, $\gamma(t_2) \in \partial G$ und $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$;

(b) für alle $t \in (t_1, t_2)$ ist $\gamma(t) \in G$;

(c) " " $t \in [a,b] \setminus [t_1, t_2]$ ist $\gamma(t) \notin \overline{G}$;

(d) $G \setminus$ Bild(γ) hat genau zwei Wegkomponenten, und Bild(γ) $\cap\, G$ liegt auf dem Rand jeder dieser beiden Komponenten.



γ läuft von Rand zu Rand.

γ_1, γ_2 laufen <u>nicht</u> von Rand zu Rand!

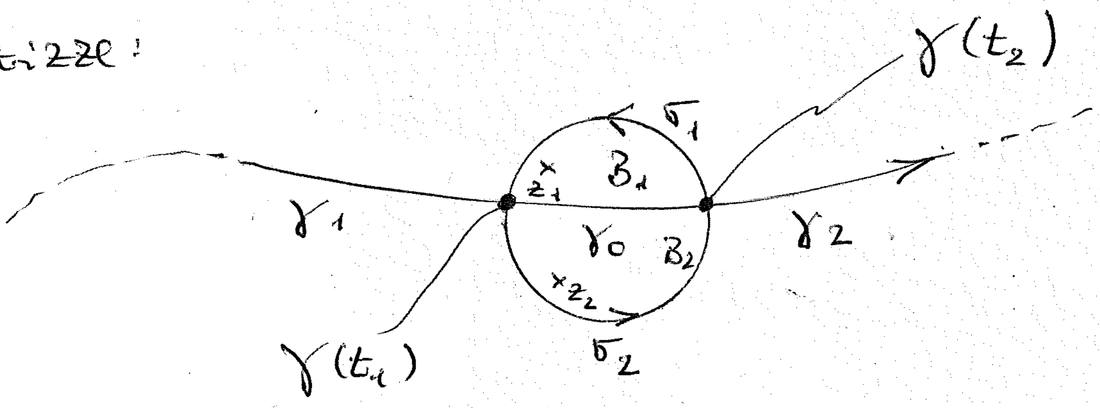
<u>Satz</u> 4: Es sei $\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$ ein geschlossener Weg, der in einer Kreisscheibe $B = B_r(z_0)$ von Rand zu Rand läuft. Ferner seien

- $\gamma_0 := \gamma|_{[t_1,t_2]}$, $\gamma_1 := \gamma|_{[a,t_1]}$, $\gamma_2 := \gamma|_{[t_2,b]}$,
- σ der positiv orientierte Rand von B,
- σ_1 der Kreisbogen von $\gamma(t_2)$ nach $\gamma(t_1)$,
- σ_2 " " " $\gamma(t_1)$ " $\gamma(t_2)$,

so dass $\sigma_1 \oplus \sigma_2 = \sigma$. Für die Zusammenhangskomponenten B_1, B_2 von $B \setminus \mathrm{Bild}(\gamma)$ gelte $\mathrm{Bild}(\sigma_i) \subset \partial B_i$. Dann gilt für $z_1 \in B_1$ und $z_2 \in B_2$

$$n(\gamma, z_1) = n(\gamma, z_2) + 1.$$

Skizze:



<u>Bew.</u>: Wir benutzen die Bez. $n(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - z}$ auch für nicht geschlossene Wege γ.

Zuerst stellen wir fest, dass z_1 und z_2 in derselben Wegkomponente von $\gamma_1 \oplus \sigma_1^- \oplus \gamma_2$ liegen, so dass $u(\gamma_1 \oplus \sigma_1^- \oplus \gamma_2, z_1) = u(\gamma_1 \oplus \sigma_1^- \oplus \gamma_2, z_2)$

bzw. $u(\gamma_1+\gamma_2, z_1) - u(\gamma_1+\gamma_2, z_2) = u(\sigma_1, z_1) - u(\sigma_1, z_2)$.

Hieraus folgt

$$u(\gamma, z_1) - u(\gamma, z_2) = u(\gamma_0, z_1) - u(\gamma_0, z_2) + \overbrace{u(\gamma_1+\gamma_2, z_1)}^{-u(\gamma_1+\gamma_2, z_2)}$$

$$= u(\gamma_0, z_1) - u(\gamma_0, z_2) + u(\sigma_1, z_1) - u(\sigma_1, z_2)$$

Nun liegt z_2 in der unbeschränkten Wegkomponente von $\gamma_0 + \sigma_1$, so dass $u(\gamma_0, z_2) + u(\sigma_1, z_2) = 0$.
Ebenso ist $u(\gamma_0, z_1) - u(\sigma_2, z_1) = 0$, so dass

$$u(\gamma, z_1) - u(\gamma, z_2) = u(\sigma_2, z_1) + u(\sigma_1, z_2) + u(\sigma_1, z_1) - u(\sigma_1, z_2)$$

$$= u(\sigma, z_1) = 1 \qquad \square$$

Bsp.: (1) Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein positiv von einem Zyklus $\Gamma = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k$ berandetes Gebiet, so ist

$$u(\Gamma, z) = \begin{cases} 1 & \text{für } z \in G \\ 0 & \text{"} \quad z \notin \overline{G} \end{cases}.$$

Begründung: Ist $z_2 \notin \overline{G}$ in der unbeschränkten Wegkomponente von $\mathbb{C} \setminus \overline{G}$, so ist $u(\Gamma, z_2) = 0$. Aus Satz 4 folgt für $z_1 \in G$, dass $u(\Gamma, z_1) = 1$ ist. (G hat als Gebiet nur eine Wegkomponente.) Ist nun $z_2 \notin \overline{G}$ in einer beliebigen Wegkomponente von $\mathbb{C} \setminus \overline{G}$, so gelangt man ebenfalls durch Überquerung eines von links kommenden Weges γ_K von z_2 zu einem $z_1 \in G$, so dass nach Satz 4 wieder $n(\Gamma, z_2) = 0$ ist.

(2) Das kann man beliebig komplizierter machen, etwa