10.3 Allgemeine Cauchysche Integralformeln und allgemeiner Cauchyscher Integralsatz

Def.: Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Ein Zyklus Γ in Ω heißt nullhomolog in Ω, wenn für jeden Punkt $z \in \Omega^c$ die Umlaufzahl $n(\Gamma, z) = 0$ ist. Zwei Zyklen $\Gamma_{1,2}$ in Ω heißen homolog in Ω, wenn $\Gamma_1 - \Gamma_2$ in Ω nullhomolog ist.

Bsp.: (1) Der Weg $\gamma_r : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto re^{it}$ $(r > 0)$ ist in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ nicht nullhomolog, weil $n(\gamma_r, 0) = 1$. γ_r und γ_s sind stets homolog in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, weil $n(\gamma_r, 0) - n(\gamma_s, 0) = 1 - 1 = 0$.

(2) Ein Zyklus Γ in einem einfach zusammenhängenden Gebiet G ist stets nullhomolog.

Begründung: Für festes $z \in G^c$ ist $f(\xi) = \frac{1}{\xi - z}$ in G holomorph. Zu Γ existiert ein Zyklus $\Gamma' = \sum_{k=1}^{n} n_k \gamma_k$ mit geschlossenen Wegen γ_k, so dass für jede holomorphe Funktion $f: G \to \mathbb{C}$ gilt $\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_{\Gamma'} f(z)\,dz$. Also ist für $z \in G^c$

$$n(\Gamma, z) = n(\Gamma', z) = \sum_{k=1}^{n} n_k\, n(\gamma_k, z) = 0,$$

letzteres aufgrund der Homotopieversion des Cauchyschen Integralsatzes.

Satz 5 (ACIS): Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f: \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph und Γ ein nullhomologer Zyklus in Ω. Dann gelten:

(1) Für jeden Punkt $z \in \Omega \setminus \mathrm{Bild}(\Gamma)$ und für alle $k \in \mathbb{N}_0$ ist

$$n(\Gamma, z) \cdot f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}}\, d\xi ;$$

(2) $\displaystyle\int_\Gamma f(z)\,dz = 0.$

(Dixon, 1971)

Bew. ① Wir zeigen (1) für $k=0$, der Fall $k \geq 1$ folgt hieraus durch Differentiation unter dem Integralzeichen. Wegen

$$n(\Gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{d\xi}{\xi - z}$$

ist (1) für $k=0$ äquivalent zu

$$(!) \qquad \int_\Gamma \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}\, d\xi = 0 \qquad (z \notin \mathrm{Bild}(\Gamma))$$

② Zum Beweis von (!) definieren wir $g: \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$

durch $$g(\xi, z) := \begin{cases} \dfrac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} & z \neq \xi \\ f'(z) & z = \xi \end{cases}$$

und zeigen zuerst, dass g in jedem $(\xi_0, z_0) \in \Omega \times \Omega$ stetig ist. Das ist klar, wenn $\xi_0 \neq z_0$ ist, denn dann gibt es eine Umgebung $U(\xi_0, z_0) \subset \Omega \times \Omega \setminus D$,

mit der Diagonale $D = \{(\xi, \xi) \in \Omega \times \Omega : \xi \in \Omega\}$, wo

$g(\xi, z) = \dfrac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}$ ist.

Sei also $\xi_0 = z_0$ und $g(\xi_0, z_0) = g(z_0, z_0) = f'(z_0)$.

Wird $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so existiert wegen der Stetigkeit von f' ein $\delta > 0$, so dass $|f'(w) - f'(z_0)| < \varepsilon$ für alle $w \in \Omega$ mit $|w - z_0| < \delta$. Für $(\xi, z) \in B_\delta(z_0) \times B_\delta(z_0)$ erhalten wir dann:

(i) im Fall $\xi = z$: $|g(\xi, z) - g(\xi_0, z_0)| = |f'(z) - f'(z_0)| < \varepsilon$

(ii) im Fall $\xi \neq z$:

$$|g(\xi, z) - g(\xi_0, z_0)| = \left| \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} - f'(z_0) \right|$$

$$= \left| \frac{1}{\xi - z} \int_{[z, \xi]} f'(w)\, dw - f'(z_0) \right| \leq \frac{1}{|\xi - z|} \left| \int_{[z, \xi]} f'(w) - f'(z_0)\, dw \right|$$

$$< \frac{|\xi - z|}{|\xi - z|} \cdot \sup \{ |f'(w) - f'(z_0)| : \underbrace{w \in [z, \xi]}_{\Rightarrow |w - z_0| < \delta} \} \leq \varepsilon.$$

③ Nun definieren wir

$$h_0(z) := \int_\Gamma g(\xi, z)\, d\xi .$$

Da g auf dem Kompaktum $\mathrm{Bild}(\Gamma) \times \overline{B_\varepsilon(z)}$ gleichmässig stetig ist, ist $h_0 : \Omega \to \mathbb{C}$ stetig.

Mit Hilfe des Satzes von Morera können wir einsehen, dass h_0 sogar holomorph ist. Dazu sei

$\gamma = [z_0, z_1, z_2, z_0]$ ein Dreiecksweg in Ω mit

$\operatorname{conv}(\{z_0, z_1, z_2\}) \subset \Omega$. Dann ist

$$\int_\gamma h_0(z)\,dz = \int_\gamma \int_\Gamma g(\xi, z)\,d\xi\,dz.$$

Integriert wird hier über Kompakta und der Integrand ist stetig, insbesondere beschränkt. Der Satz von Fubini, den Sie in der Analysis III gelernt haben (oder noch lernen werden) erlaubt es, die Integrationsreihenfolge zu vertauschen, so dass

$$\int_\gamma h_0(z)\,dz = \int_\Gamma \int_\gamma g(\xi, z)\,dz\,d\xi$$

Nun ist für festes ξ die Funktion

$$z \mapsto g(\xi, z) = \begin{cases} \dfrac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} & z \neq \xi \\ f'(z) & z = \xi \end{cases}$$

stetig und in $\Omega \setminus \{\xi\}$ holomorph, nach der Folgerung aus dem Satz von Morera also auf ganz Ω holomorph, so dass (nach Goursat)

$$\int_\gamma g(\xi,z)\,dz = 0$$

und damit $\int_\gamma h_0(z)\,dz = 0$. ($\overset{\text{Mo-}}{\underset{\text{rera}}{\Longrightarrow}}$ h_0 holomorph in Ω.)

④ Auf $\Omega_0 := \{z\in\mathbb{C} : n(\Gamma,z)=0\}$ definieren wir

$$h_1(z) := \int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi .$$

Dann ist $h_1 : \Omega_0 \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, und für $z \in \Omega \cap \Omega_0$ haben wir wegen $n(\Gamma,z)=0$

$$h_1(z) = \int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi = \int_\Gamma \frac{f(\xi)-f(z)}{\xi - z}\,d\xi = h_0(z)$$

Damit können wir h_0 auf $\Omega \cup \Omega_0$ holomorph fortsetzen durch

$$h : \Omega\cup\Omega_0 \to \mathbb{C},\quad z \mapsto h(z) := \begin{cases} h_0(z) : z\in\Omega \\ h_1(z) : z \in \Omega_0 . \end{cases}$$

Nun ist Γ nach Voraussetzung nullhomolog in Ω, d.h. es gilt $n(\Gamma,z)=0 \ \forall z\in\Omega^c$, was bedeutet, dass $\Omega^c \subset \Omega_0$ und somit $\Omega\cup\Omega_0 = \mathbb{C}$. Also ist h eine ganze Funktion.

Nun umfasst Ω_0 die unbeschränkte Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Bild}(\Gamma)$, so dass für ein hinreichend großes $R > 0$

und alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq R$ gilt

$$|h(z)| = |h_1(z)| \leq \|f\|_{\text{Bild}(\Gamma)} \left| \int_\Gamma \frac{d\xi}{\xi - z} \right|$$

$$\leq \|f\|_{\text{Bild}(\Gamma)} L(\Gamma) \cdot \frac{1}{\text{dist}(z, \text{Bild}\,\Gamma)} \longrightarrow 0 \quad (z \to \infty)$$

h ist also eine beschränkte ganze Funktion, nach Liouville konstant, und wegen $\lim_{z \to \infty} |h(z)| = 0$ ist diese Konstante $= 0$. Insbesondere ist $h_0(z) = 0$ für alle $z \in \Omega \setminus \text{Bild}(\Gamma)$ und das ist (!).

⑤ Bew. von (2). Sei $z \in \Omega \setminus \text{Bild}(\Gamma)$. Dann wenden wir (1) mit $k = 0$ an auf die holomorphe Funktion $F(w) := (w - z) \cdot f(w)$ (mit $F(z) = 0$!).

Dann ist

$$0 = n(\Gamma, z) F(z) \overset{(1)}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{F(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(\xi) d\xi .$$

$\square$

Folgerung: Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Die Zyklen Γ und Γ' seien homolog in Ω und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt

$$\int_\Gamma f(z) dz = \int_{\Gamma'} f(z) dz .$$

(Folgt aus Satz 5 (2), angewendet mit dem in Ω nullhomologen Zyklus $\Gamma - \Gamma'$.)