11. Komplexe Logarithmusfunktionen

In Ana I haben wir den "natürlichen" Logarithmus

$$\ln : (0,\infty) \to \mathbb{R}$$

als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion

$$\exp : \mathbb{R} \to (0,\infty)$$

definiert. Da $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ zwar surjektiv aber $2\pi i$-periodisch und daher nicht injektiv ist, lässt sich diese Auffassung nicht ohne Weiteres ins Komplexe übertragen. Man kann die Injektivität erzwingen, indem man den Definitionsbereich der Exponentialfunktion einschränkt.

Bsp.: Für $c \in \mathbb{R}$ sei $S_c := \{x+iy \in \mathbb{C} : c \leq y < c+2\pi\}$ ein halboffener horizontaler Streifen der Breite 2π. Dann ist

$$\exp|_{S_c} : S_c \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

bijektiv und besitzt eine Umkehrfunktion, die allerdings in allen Punkten $z = r \cdot e^{ic}$ mit $r > 0$ unstetig ist. (Warum?) Nimmt man die Gerade $G_c = \{x+ic \in \mathbb{C} : x \in \mathbb{R}\}$ vom Definitionsbereich S_c aus, so erhält man eine Bijektion

$$\exp|_{\overset{\circ}{S}_c} : \overset{\circ}{S}_c \to \mathbb{C} \setminus \{r \cdot e^{ic} \in \mathbb{C} : r \geq 0\},$$

die holomorph ist und nach Satz 5 in Abschnitt 9.3 (Ableitung der Umkehrfunktion, Diskussion zum Offenheitssatz) eine ebenfalls holomorphe Umkehrfunktion besitzt. Von besonderer Bedeutung ist hierbei der Fall $c = -\pi$; dann nennt man die Umkehrfunktion den "Hauptzweig" des Logarithmus.

Abgesehen von den genannten gibt es eine Vielzahl weiterer lokaler Inverser der e-Funktion.

<u>Def.</u>: Es sei $G \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ein Gebiet.

(a) Eine stetige Funktion $L : G \to \mathbb{C}$ heißt <u>ein Zweig des Logarithmus</u> oder <u>eine Logarithmusfunktion auf G</u>, wenn für alle $z \in G$

$$e^{L(z)} = z \qquad \text{gilt.}$$

(b) Eine stetige Funktion $A : G \to \mathbb{R}$ heißt <u>eine Argumentfunktion auf G</u>, wenn

$$|z| \cdot e^{iA(z)} = z$$

für alle $z \in G$ gilt.

Bew.: Genau dann ist $A: G \to \mathbb{R}$ eine Argumentfunktion auf G, wenn $L(z) = \ln(|z|) + iA(z)$ dort eine Logarithmusfunktion ist. Daher können wir uns im Folgenden auf Logarithmusfunktionen beschränken.

Lemma 1: Es sei L eine Logarithmusfunktion auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dann gelten:

(1) $L: G \to \mathbb{C}$ ist injektiv; $L: G \to L(G)$ ist eine Umkehrfunktion von $\exp|_{L(G)}: L(G) \to G$.

(2) Mit L ist für $k \in \mathbb{Z}$ auch

$$L_k: G \to \mathbb{C},\ z \mapsto L_k(z) := L(z) + 2\pi i k$$

eine Logarithmusfunktion. Auf G gibt es keine weiteren Zweige des Logarithmus.

(3) Für $k \neq \ell$ ist $L_k(G) \cap L_\ell(G) = \emptyset$.

(4) L ist holomorph und für alle $z \in G$ gilt $L'(z) = \frac{1}{z}$.

Bew.: (1) Für $z_1, z_2 \in G$ mit $L(z_1) = L(z_2)$ gilt

$$z_1 = \exp(L(z_1)) = \exp(L(z_2)) = z_2,$$

also ist L injektiv bzw. bijektiv, wenn man den Zielbereich auf das Bild $L(G)$ einschränkt. 97

Dann gilt per def. $\exp \circ L = id_G$ und folglich auch $L \circ \exp = id_{L(G)}$.

(2) $e^{L_k(z)} = e^{L(z)+2\pi i k} = e^{L(z)} \cdot e^{2\pi i k} = e^{L(z)} = z$.

Aus $z = e^{L(z)} = e^{\tilde{L}(z)}$ folgt $e^{L(z)-\tilde{L}(z)} = 1$, also $L(z) - \tilde{L}(z) = 2\pi i k(z)$ mit einer stetigen Funktion $k: G \to \mathbb{Z}$. Da G ein Gebiet ist, ist k konstant.

(3) Sind $z_1, z_2 \in G$ mit $L_k(z_1) = L_\ell(z_2)$, so folgt $z_1 = e^{L_k(z_1)} = e^{L_\ell(z_2)} = z_2$ und damit $L_k(z_1) = L_\ell(z_1)$, so dass nach (2) $k = \ell$.

(4) Folgt aus Satz 5 in Abschnitt 8.3. □

Teil (4) des Lemmas gibt uns einen Hinweis, dass es nicht auf jedem Gebiet $G \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ einen Zweig des Logarithmus gibt. Ein Bsp. ist

$$G = B_2(0) \setminus \overline{B_{\frac{1}{2}}(0)}.$$

Die Existenz einer Logarithmusfunktion und damit einer Stammfunktion von $z \mapsto \frac{1}{z}$ steht nämlich im Widerspruch zu

$$\int_{\partial B_1(0)^+} \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0.$$

Satz 1: Sei $G \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ein Gebiet. D.s.ä.:

(1) Auf G existiert ein Zweig des Logarithmus.

(2) Auf G besitzt $z \mapsto \frac{1}{z}$ eine Stammfunktion.

(3) Für jeden geschlossenen Weg γ in G gilt

$$n(\gamma, 0) = 0.$$

Insbesondere gibt es auf jedem einfach zusammenhängenden Gebiet $G \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ eine Logarithmusfunktion.

Bew.: $(1) \Rightarrow (2)$ Lemma 1 (4).

$(2) \Rightarrow (1)$ Ist $f'(z) = \frac{1}{z}$ für alle $z \in G$, so folgt

$$\frac{d}{dz} \frac{e^{f(z)}}{z} = e^{f(z)} \left(\frac{f'(z)}{z} - \frac{1}{z^2} \right) = 0,$$

da G ein Gebiet ist also $e^{f(z)} = cz$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Wir wählen $c_0 \in \mathbb{C}$ mit $e^{c_0} = c$ und $L(z) := f(z) - c_0$. Dann ist

$$e^{L(z)} = e^{f(z)} \cdot e^{-c_0} = z.$$

$(2) \Rightarrow (3)$ Sei $\gamma : [a,b] \to G$ ein Weg mit $\gamma(a) = \gamma(b)$ und $f : G \to \mathbb{C}$ eine Stammfunktion von $z \mapsto \frac{1}{z}$. Dann ist $n(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} (f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))) = 0$.

$(3) \Rightarrow (2)$ Wir fixieren $z_0 \in G$. Da G ein Gebiet ist, existiert zu jedem $z \in G$ ein Weg $\gamma_z : [a,b] \to G$

mit $\gamma_z(a) = z_0$ und $\gamma_z(b) = z$. Weil $n(\gamma, 0) = 0$ ist für jeden geschlossenen Weg γ in G, ist

$$f(z) := \int_{\gamma_z} \frac{dw}{w}$$

wohldefiniert und es gilt $f'(z) = \frac{1}{z}$. □

Eine spezielle Logarithmusfunktion ist von besonderer Bedeutung:

<u>Def.</u>: Die Umkehrfunktion von

$$\exp|_{\mathring{S}_{-\pi}} : \mathring{S}_{-\pi} = \{x+iy \in \mathbb{C} : |y| < \pi\} \to \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$$

heißt der <u>Hauptzweig</u> des (komplexen) Logarithmus und wird mit

$$\mathrm{Log} : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \to \mathring{S}_{-\pi}$$

bezeichnet. Für $z_0 \in \mathbb{C} \setminus [-\infty, 0]$ nennt man $\mathrm{Log}(z_0)$ den <u>Hauptwert</u> des Logarithmus von z_0.

(Bem.: Viele Autoren ziehen „log" als Bezeichnung für den Hauptzweig vor.)

Lemma 2 (Eigenschaften des Hauptzweigs):

(1) Für $z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ mit $r > 0$ und $\varphi \in (-\pi, \pi)$ ist $\operatorname{Log}(z) = \ln(r) + i\varphi$. Insbesondere stimmt Log auf $(0, \infty)$ mit ln überein, z.B. ist $\operatorname{Log}(1) = 0$.

(2) Für $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ gilt $\operatorname{Log}(\frac{1}{z}) = -\operatorname{Log}(z)$.

(3) Für $z, w \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ mit $z \cdot w \notin (-\infty, 0]$ gilt

$$\operatorname{Log}(zw) - \operatorname{Log}(z) - \operatorname{Log}(w) \in 2\pi i \mathbb{Z}.$$

(4) Für $|z| < 1$ hat man die Potenzreihendarstellung

$$\operatorname{Log}(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n.$$

Diese gilt auch für $z = e^{i\varphi}$ mit $\varphi \in (-\pi, \pi)$.

Bew.: (1) folgt aus $\exp(\ln(r) + i\varphi) = r \cdot e^{i\varphi}$ und $|\varphi| < \pi$, man beachte Lemma 1 (2).

(2) $\frac{d}{dz} \operatorname{Log}(z) + \operatorname{Log}(\frac{1}{z}) = 0$ und $\operatorname{Log}(1) = 0$ (nach (1)).

(3) $\exp(\operatorname{Log}(zw) - \operatorname{Log}(z) - \operatorname{Log}(w))$

$$= \exp(\operatorname{Log}(zw)) \exp(\operatorname{Log}(\tfrac{1}{z})) \exp(\operatorname{Log}(\tfrac{1}{w}))$$

$$\overset{(2)}{=} z \cdot w \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{w} = 1$$

$$\Rightarrow \operatorname{Log}(zw) - \operatorname{Log}(z) - \operatorname{Log}(w) \in 2\pi i \mathbb{Z}.$$

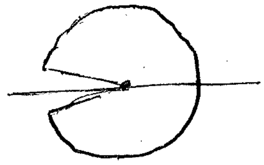
(4) Die Reihendarstellung ist für $z\in(-1,1)$ bekannt aus Analysis I, auch, dass der Konvergenzradius 1 ist. Aus dem Identitätssatz folgt die Behauptung für $|z|<1$. – Das verallgemeinerte Leibnizkriterium liefert für den Reihenrest die Abschätzung

$$\left|\sum_{k=m}^{\infty} a_k z^k\right| \le \frac{2a_m}{|z-1|} \quad (a_m \searrow 0,\ |z|=1,\ z\neq 1).$$

Angewendet mit $a_k=\frac{r^k}{k}$ $(0\le r\le 1)$ und $z=-e^{i\varphi}$ $(|\varphi|<\pi)$ ergibt sich

$$\left|\sum_{k=m}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} r^k e^{ik\varphi}\right| \le \frac{2}{m}\cdot\frac{1}{|1+e^{i\varphi}|} = \frac{1}{m}\,\frac{1}{|\cos(\frac{\varphi}{2})|}.$$

Bei Einschränkung auf ein Kreissegment



$$K_\varepsilon = \{z=-re^{i\varphi} : 0\le r\le 1,\ |\varphi|\le \frac{\pi-\varepsilon}{2}\}$$

bedeutet dies die gleichmässige Konvergenz und damit die Stetigkeit der Grenzfunktion in $\overline{B_1(0)}\setminus[-1,0)$. Damit ist also für $|z|=1$, $z\neq -1$

$$\mathrm{Log}(1+z) = \lim_{\varrho\nearrow 1} \mathrm{Log}(1+\varrho z) = \lim_{\varrho\nearrow 1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\varrho^k z^k$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\cdot z^k.$$

□

Bem.: In (3) ist tatsächlich $\mathrm{Log}(zw)\neq \mathrm{Log}(z)+\mathrm{Log}(w)$ möglich. z.B. ist für $z=w=e^{\frac{2\pi i}{3}}$ $zw=e^{\frac{4\pi i}{3}}=e^{-\frac{2\pi i}{3}}$, also $-\frac{2\pi i}{3}=\mathrm{Log}(zw)\neq \mathrm{Log}(z)+\mathrm{Log}(w)=\frac{4\pi i}{3}$.

Mit Hilfe der Logarithmusfunktionen können wir Potenzen mit nichtganzzahligen Exponenten, insbesondere auch Wurzeln erklären.

Def.: (1) Es sei $G \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ein Gebiet, auf dem ein Zweig L des Logarithmus erklärt ist. Dann heißt für $a \in \mathbb{C}$ die Abbildung

$$G \ni z \mapsto z^a := \exp(a\,L(z))$$

ein Zweig der a-ten Potenz auf G.

(2) Ist hierbei $G = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ und $L = \mathrm{Log}$, so nennt man $z \mapsto z^a$ den Hauptzweig der a-ten Potenz.

Satz 2: (1) Jeder Zweig der a-ten Potenz ist holomorph, und es gilt

$$\frac{d}{dz} z^a = a\,z^{a-1},$$

sofern zur Erklärung von z^{a-1} derselbe Zweig des Logarithmus herangezogen wird.

(2) Für $z, w \in G$ mit $L(zw) = L(z) + L(w)$ gilt $(zw)^a = z^a w^a$.

(3) Sind $z \mapsto z^a$ und $z \mapsto z^b$ mit Hilfe derselben Logarithmusfunktion erklärt, so ist $z^{a+b} = z^a z^b$.

Bew.: Folgt aus der Definition; für (1) benötigt man noch die Kettenregel, für (2), (3) die Funktionalgleichung der e-Funktion. (165a)

Bsp.: Der Hauptzweig der Quadratwurzel ist gegeben durch: $\sqrt{}: \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \sqrt{z}$,

wobei für $z = re^{i\varphi}$ mit $|\varphi| < \pi$

$$\sqrt{z} := \underbrace{\sqrt{r}}_{\text{reelle Wurzel}} \cdot e^{i\varphi/2} \quad \text{erklärt ist.}$$

Diese Wurzel bildet $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ biholomorph auf die rechte Halbebene $\{x + iy \in \mathbb{C} : x > 0\}$ ab.