12. Laurentreihen

Def.: Eine Reihe der Form $L(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z-z_0)^n$ mit Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und einer komplexen Koeffizientenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ heißt eine <u>Laurentreihe</u>. Hierbei bezeichnet man $L_H(z) := \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-z_0)^n$ als den <u>Haupt-</u> und $L_N(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ als den <u>Nebenteil</u> der Reihe.

Bem.: (1) Eine Laurentreihe heißt (punktweise, kompakt, ...) konvergent, wenn Haupt- <u>und</u> Nebenteil der Reihe in der entsprechenden Weise konvergieren.

(2) Der Nebenteil $L_N(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ einer Laurentreihe ist eine Potenzreihe und konvergiert daher normal in einem Kreis $B_R(z_0)$, wobei

$$R = \left(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\right)^{-1} \in [0,\infty]$$

der Konvergenzradius dieser Potenzreihe ist.

(3) Der Hauptteil $L_H(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-z_0)^n$ konvergiert genau dann (in der Variablen z), wenn die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} w^n$ in der Variablen $w = \frac{1}{z-z_0}$ konvergiert, in diesem Fall ist die

Konvergenz von L_H ebenfalls normal.

Sei $\frac{1}{r} \in [0,\infty]$ (mit der Konvention $\frac{1}{0}=\infty$ und $\frac{1}{\infty}=0$) der Konvergenzradius von $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} w^n$.

Dann gelten:

(a) Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-z_0| > r$ konvergiert $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-z_0)^n$ normal und daher auch absolut;

(b) für alle $z \in B_r(z_0)$ divergiert $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-z_0)^n$;

(c) für $|z-z_0| = r \in (0,\infty)$ sind Einzelfalluntersuchungen erforderlich.

(4) Der Konvergenzbereich einer Laurentreihe ist der Durchschnitt der beiden in (2) und (3) genannten, und das ist der Kreisring

$$K_{r,R}(z_0) := \{ z \in \mathbb{C} : r < |z-z_0| < R \},$$

möglicherweise kommen Teile des Randes hinzu. Konvergenz in $K_{r,R}(z_0)$ setzt natürlich voraus, dass

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|} = r < R = \left(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\right)^{-1}.$$

(5) Aufgrund der normalen (und damit kon-

pakten) Konvergenz einer Laurentreihe L ist

$$L: K_{r,R}(z_0) \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto L(z)$$

holomorph. (Weierstraßscher Konvergenzsatz)
Ebenso wie Potenzreihen können Laurentreihen gliedweise differenziert und integriert werden. Das ist klar für den Nebenteil und (wegen der normalen Konvergenz) für die Integration des Hauptteils. Für dessen Ableitung verwendet man die Kettenregel mit innerer Funktion $w(z) = \frac{1}{z-z_0}$.

(6) Auch für Laurentreihen gilt ein Identitätssatz: Stimmen zwei Laurentreihen $L_1(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z-z_0)^n$ und $L_2(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n (z-z_0)^n$ auf einem (nicht leeren) Kreisring $K_{r,R}(z_0)$ überein, so gilt $a_n = b_n \ \forall n \in \mathbb{Z}$.

Bew.: Wähle $\rho \in (r,R)$ und $\gamma_\rho(t) = z_0 + \rho e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.
Dann ist

$$\int_{\gamma_\rho} (z-z_0)^{-n-1} L_1(z)\,dz \overset{(5)}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \int_{\gamma_\rho} (z-z_0)^{k-n-1}\,dz = 2\pi i a_n$$

und ebenso $\int_{\gamma_\rho} (z-z_0)^{-n-1} L_2(z)\,dz = 2\pi i b_n$. Aus $L_1 = L_2$ folgt also $a_n = b_n$, wobei $n \in \mathbb{Z}$ beliebig ist. $\square$

Bsp.: (1) Die Funktion

$$f : \mathbb{C} \setminus \{0\} = K_{0,\infty}(0) \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto f(z) = e^{z} + e^{\frac{1}{z}}$$

ist holomorph und besitzt im "Kreisring" $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ die nach Bem. (6) eindeutig bestimmte Laurentreihendarstellung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{z^n}{|n|!} + \delta_{0n} .$$

(2) Die Funktion

$$g : \mathbb{C} \setminus \{0,1\} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto g(z) := \frac{1}{z(1-z)}$$

ist holomorph. Zum Entwicklungspunkt $z_0 = 0$ existieren zwei verschiedene Laurententwicklungen in verschiedenen Kreisringen:

(a) In $K_{0,1}(0)$ schreiben wir mit Hilfe der geometrischen Reihe

$$g(z) = \frac{1}{z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n = L_H(z) + L_N(z)$$

mit dem Hauptteil $L_H(z) = \frac{1}{z}$ und dem Nebenteil $L_N(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$.

(b) In $K_1(0,\infty)$ benutzen wir die geometrische Reihe in der Variablen $\frac{1}{z}$ (mit $|\frac{1}{z}| < 1$):

$$g(z) = \frac{1}{z^2} \frac{-1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} = -\sum_{n=-\infty}^{-2} z^n = L_H(z),$$

der Nebenteil ist hier $L_N = 0$.

<u>Satz</u> 1: Es seien $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 \leq r < R \leq \infty$ und $f: K_{r,R}(z_0) \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann existiert eine Folge $(a_n)_n$ komplexer Zahlen, so dass für alle $z \in K_{r,R}(z_0)$

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n.$$

Die Koeffizienten sind gegeben durch

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} \, d\xi ,$$

wobei $\rho \in (r, R)$ und $\gamma_\rho(t) = z_0 + \rho e^{it}$ mit $t \in [0, 2\pi]$ sind. Ferner gilt die Abschätzung $|a_n| \leq \rho^{-n} \|f\|_{\partial B_\rho(z_0)}$.

<u>Bew.</u>: Sei $z \in K_{r,R}(z_0)$ fixiert. Wir wählen Radien $\rho_{1,2}$, so dass

$$r < \rho_1 < |z - z_0| < \rho_2 < R.$$

Dann gilt für $\xi \in \partial B_{\rho_1}(z_0)$:

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi - z_0) - (z - z_0)} = \frac{-1}{z - z_0} \, \frac{1}{1 - \frac{\xi - z_0}{z - z_0}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{(\xi - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}}}_{|\cdots| < 1}$$

und für $\xi \in \partial B_{\rho_2}(z_0)$

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\xi - z_0} \, \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}}}_{|\cdots| < 1}$$

Da $|\xi - z_0| = \rho_i$ auf $\partial B_{\rho_i}(z_0)$ konstant ist, ist die Konvergenz dort (aufgrund des Weierstraß'schen Kriteriums) gleichmäßig, so dass wir bei Integration über γ_{ρ_i} die Reihenfolge von Integration und Summation vertauschen können.

Der Zyklus $\Gamma = \gamma_{\varrho_2} - \gamma_{\varrho_1}$ ist nullhomolog in $K_{r,R}(z_0)$ (d.h. $n(\Gamma, w) = 0 \ \forall w \in K_{r,R}(z_0)^c$). Wegen $n(\Gamma, z) = 1$ ergibt die Cauchysche Integralformel (für $k=0$):

$$2\pi i\, f(z) = \int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = \int_{\gamma_{\varrho_2}} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi - \int_{\gamma_{\varrho_1}} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\int_{\gamma_{\varrho_2}} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\, d\xi \Big) (z - z_0)^n$$

$$+ \Big(\int_{\gamma_{\varrho_1}} (\xi - z_0)^n f(\xi)\, d\xi \Big) \frac{1}{(z - z_0)^{n+1}} \qquad n = -(n+1)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\int_{\gamma_{\varrho_2}} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\, d\xi \Big) (z - z_0)^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} \Big(\int_{\gamma_{\varrho_2}} \frac{f(\xi)\, d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}} \Big) (z - z_0)^n$$

Nun sind für jedes $\varrho \in (r, R)$ die Wege $\gamma_\varrho, \gamma_{\varrho_1}, \gamma_{\varrho_2}$ homolog in $K_{r,R}(z_0)$, sodass wir die Reihen zusammenfassen können zu

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \Big(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\varrho} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\, d\xi \Big) (z - z_0)^n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n,$$

sofern die a_n wie behauptet gewählt werden. Deren Eindeutigkeit wurde in Bem. (6) festgestellt, die Abschätzung ergibt sich aus

$$\Big| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\varrho} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\, d\xi \Big| \le \frac{L(\gamma_\varrho)}{2\pi} \varrho^{-(n+1)} \|f\|_{\partial B_\varrho(z_0)} = \frac{\|f\|_{\partial B_\varrho(z_0)}}{\varrho^n}$$

Standardabsch.

$\square$