13. Der Residuensatz

Def.: Es sei $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z-z_0)^n$ eine Laurentreihe, die in einem Kreisring $K_{0,\varepsilon}(z_0)$ mit $\varepsilon > 0$ konvergiert. Dann heißt $\mathrm{Res}_{z_0}(f) := a_{-1}$ das Residuum von f in z_0.

Hinweis: In diesem Abschnitt werden wir häufig über Wege $\gamma_{\varrho,w} : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \gamma_{\varrho,w}(t) := w + \varrho e^{it}$ integrieren.

Bem.: Nach Satz 1 des vorigen Abschnitts gilt für $\varrho \in (0,\varepsilon)$:
$$\mathrm{Res}_{z_0}(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\varrho,z_0}} f(z)\,dz.$$

Satz 1 (Residuensatz) Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $A := \{z_1, \dots, z_n\} \subset \Omega$, Γ ein nullhomologer Zyklus in Ω mit $\mathrm{Bild}(\Gamma) \cap A = \emptyset$ und $f : \Omega \setminus A \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt
$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} n(\Gamma, z_k)\, \mathrm{Res}_{z_k}(f).$$

Bew.: Wir wählen $r_1, \dots, r_n > 0$, so dass $\overline{B_{r_k}(z_k)} \subset \Omega$ und $\overline{B_{r_k}(z_k)} \cap \overline{B_{r_j}(z_j)} = \emptyset$ $\forall k \neq j \in \{1, \dots, n\}$ und setzen $m_k := n(\Gamma, z_k)$ sowie $B := \sum_{k=1}^{n} m_k \gamma_{r_k, z_k}$.

Beta, ist ein Zyklus!

Dann sind Γ und B homolog in $\Omega \setminus A$, denn

- für $z \notin \Omega$ ist $n(\Gamma, z) = n(B, z) = 0$ und
- für $z_k \in A$ ist B grade so definiert, dass

$$n(\Gamma, z_k) = m_k = n(B, z_k).$$

Also: $\Gamma - B$ ist nullhomolog in $\Omega \setminus A$ und das allgemeine Cauchysche Integralsatz ergibt:

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma - B} f(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\Gamma} f(z)\,dz - \sum_{k=1}^{n} m_k \int_{\gamma_{\varepsilon_k, z_k}} f(z)\,dz \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z)\,dz \quad - \sum_{k=1}^{n} \underbrace{m_k}_{= n(\Gamma, z_k)} \operatorname{Res}_{z_k}(f) \qquad \square$$

Um diesen Satz zur Berechnung von Integralen nutzen zu können, benötigen wir Methoden zur Bestimmung von Residuen, die nicht auf die Gleichung $\operatorname{Res}_{z_0}(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)\,dz$ zurückgreifen:

25.06.

Lemma 1: (1) Es sei $f(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ in $K_{0,\varepsilon}(z_0)$, wobei $\varepsilon > 0$ und $m \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$\operatorname{Res}_{z_0}(f) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \neq z_0}} \left(\frac{d}{dz}\right)^{m-1} \left((z - z_0)^m f(z)\right).$$

(2) Sei g in z_0 holomorph. Dann gelten:

(i) falls $f(z) = \sum_{k=-1}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$: $\mathrm{Res}_{z_0}(fg) = g(z_0)\,\mathrm{Res}_{z_0}(f)$,

(ii) falls h in z_0 holomorph ist mit $h(z_0) = 0$

und $h'(z_0) \neq 0$: $\mathrm{Res}_{z_0}\left(\frac{g}{h}\right) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$.

Bew.: Zu (1) setzen wir $g(z) := (z-z_0)^m f(z) = \sum_{k=-m} a_k (z-z_0)^{k+m}$

$= \sum_{k=0}^{\infty} a_{k-m}(z-z_0)^k \rightsquigarrow \left(\frac{d}{dz}\right)^{m-1} g(z) = (m-1)!\,a_{-1} + (z-z_0)(\dots)$

$\rightsquigarrow \lim\limits_{\substack{z\to z_0\\ z\neq z_0}} \left(\frac{d}{dz}\right)^{m-1} g(z) = (m-1)!\,\mathrm{Res}_{z_0}(f)$.

Zum Beweis von (2) verwenden wir (1) mit $m=1$:

(i) $\mathrm{Res}_{z_0}(fg) = \lim\limits_{\substack{z\to z_0\\ z\neq z_0}} g(z)\cdot(z-z_0)f(z)$

$= \lim\limits_{z\to z_0} g(z)\cdot \lim\limits_{\substack{z\to z_0\\ z\neq z_0}} (z-z_0)f(z) = g(z_0)\,\mathrm{Res}_{z_0}(f)$.

(ii) Nach (i) reicht es, dies für $g \equiv 1$ zu zeigen.

$\mathrm{Res}_{z_0}\left(\frac{1}{h}\right) \underset{(1)}{=} \lim\limits_{\substack{z\to z_0\\ z\neq z_0}} \frac{z-z_0}{h(z)} \underset{h(z_0)=0}{=} \frac{1}{h'(z_0)}$. $\square$

Bsp.: In den folgenden Beispielen ist die Umlaufzahl der Einfachheit halber stets $\in \{0, 1\}$.

(1) $$\int_{\partial B_1^+(i)} \frac{dz}{(z^2+1)^3} = \int_{\gamma_{1,i}} \frac{dz}{(z-i)^3(z+i)^3} = ?$$

Der Integrand $f(z) = (z-i)^{-3}(z+i)^{-3}$ hat Singularitäten in $z_0 = i$ und $z_1 = -i$, davon wird nur z_0 von $\gamma_{1,i}$ umlaufen. Zur Berechnung des Residuums verwenden wir Lemma 1 (1) mit $m=3$:

$$\mathrm{Res}_i(f) = \frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}(z+i)^{-3}\Big|_{z=i} = \frac{(-3)(-4)}{2}(z+i)^{-5}\Big|_{z=i}$$

$$= 6 \cdot (2i)^{-5} = -\frac{3i}{16}$$

Für das Integral ergibt sich somit

$$\int_{\partial B_1^+(i)} \frac{dz}{(z^2+1)^3} = 2\pi i \cdot \frac{-3i}{16} = \frac{3\pi}{8}.$$

(2) $$\int_{\partial B_2^+(0)} \frac{dz}{(z-5)(z^2+1)} = \int_{\gamma_{2,0}} f(z)\,dz = ? \quad \text{mit } f(z) = \frac{1}{(z-5)(z-i)(z+i)}$$

In diesem Fall erhalten wir zwei Beiträge zum Integral, je einen von $z_\pm = \pm i$: Nach Lemma 1 (2i)

$$\mathrm{Res}_i(f) = \frac{1}{z-5}\,\frac{1}{z+i}\Big|_{z=i} = \frac{1}{2i}\,\frac{1}{i-5};$$

$$\mathrm{Res}_{-i}(f) = \frac{1}{z-5}\,\frac{1}{z-i}\Big|_{z=-i} = \frac{-1}{2i}\cdot\frac{1}{-i-5} = \frac{1}{2i}\,\frac{1}{i+5}.$$

Damit ergibt sich

$$\int\limits_{\partial B_2^+(0)} \frac{dz}{(z-5)(z^2+1)} = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{i-5}+\frac{1}{i+5}\right) = \frac{\pi}{-26}\cdot 2i = \frac{-\pi i}{13}.$$

(3) $\int\limits_{\partial B_\pi^+(1)} \cot(z)\,dz = \int\limits_{\gamma_{\pi,1}} f(z)\,dz = ?$ mit $f(z) = \cot(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)}$.

Es werden zwei sog. "einfache Polstellen bei $z_0 = 0$ und $z_1 = \pi$ umlaufen. Lemma 1 (2ii) ergibt für die Residuen

$$\operatorname{Res}_{z_i}(f) = \frac{\cos(z_i)}{\sin'(z_i)} = 1$$

und damit $\int\limits_{\partial B_\pi^+(1)} \cot(z)\,dz = 4\pi i$.

Im Folgenden sollen einige Situationen diskutiert werden, in denen man den Residuensatz zur Berechnung reeller, zumeist uneigentlicher, Integrale verwenden kann.

Satz 2: Es sei $R = \frac{P}{Q}$ eine rationale Funktion, so dass

(i) $Q(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (ii) $\deg Q \geq \deg P + 2$.

$z_1, \dots, z_n$ seien die paarweise verschiedenen Nullstellen von Q in der oberen Halbebene. Dann gilt

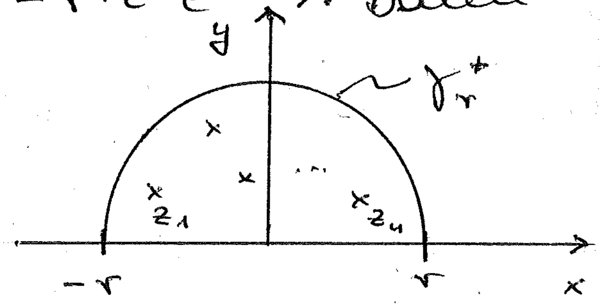
$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}_{z_k}(R).$$

Bew.: Aufgrund der Vor. (ii) existieren nach Lemma 2 im Abschnitt 8.4 ein Radius $R>0$ und ein $C>0$, so

dass $$|R(z)| \leq \frac{C}{|z|^2} \quad \forall\, |z| \geq R.$$

Wegen (i) gilt diese Abschätzung (evtl. mit einer größeren Konstante) auch auf der gesamten reellen Achse, so dass nach dem Majorantenkriterium (Ana I) das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,dx$ absolut konvergiert.

Nun sei $R_0 := \max\{|z_k| : 1 \leq k \leq n\}$ und, für $r > R_0$, $\gamma_r := [-r,r] \oplus \gamma_r^+$ mit $\gamma_r^+ : [0,\pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \gamma_r^+(t) = r \cdot e^{it}$ $(\rightsquigarrow (\gamma_r^+)'(t) = r \cdot i \cdot e^{it})$. Dann ist nach dem Residuensatz



$$\int_{\gamma_r} R(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}_{z_k}(R)$$

und also

$$\left| \int_{-r}^{r} R(x)\,dx - 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}_{z_k}(R) \right| = \left| \int_{\gamma_r^+} R(z)\,dz \right|$$

$$= \left| \int_0^{\pi} R(re^{it}) \cdot r i e^{it}\,dt \right| \leq \frac{C\pi}{r} \longrightarrow 0 \quad (r \to \infty).$$

$\square$

Bsp. + Bem.: (1) Für die Berechnung des uneigentlichen Integrals $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}$ sind wir in der Situation des Satzes mit $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, wobei $P(z) = 1$ und $Q(z) = 1+z^4$, mit den einfachen Nullstellen $z_{1,2} = \frac{\pm 1 + i}{\sqrt{2}} = \begin{cases} e^{i\frac{\pi}{4}} \\ e^{i\frac{3\pi}{4}} \end{cases}$ in der oberen Halbebene und ihren komplex konjugierten, die wir nicht berücksichtigen müssen. Für die Residuen erhalten wir mit Lemma 1 (2)

$$\mathrm{Res}_{z_i}(R) = \frac{P(z_i)}{Q'(z_i)} = \frac{1}{4 z_i^3},$$

wobei $z_1^3 = (e^{i\frac{\pi}{4}})^3 = z_2$ und $z_2^3 = (e^{i\frac{3\pi}{4}})^3 = z_1$. Also

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = 2\pi i \left(\mathrm{Res}_{z_1}(R) + \mathrm{Res}_{z_2}(R)\right) = \frac{\pi i}{2}(\bar{z}_2 + \bar{z}_1) = \frac{\pi i}{2}(-\sqrt{2}i) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

(2) Der Beweis des Satzes zeigt die folgende, etwas stärkere Aussage: Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, so dass $\overline{\mathbb{H}} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\, z \geq 0\} \subset \Omega$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, Q wie in Satz 2 und $R = \frac{f}{Q}$, so dass für ein $\varepsilon > 0$ und ein $C > 0$ gelte $|R(z)| \leq \frac{C}{|z|^{1+\varepsilon}}$. Dann ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\, dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}_{z_k}(R).$$

Anwendung (mit $\varepsilon = \frac{1}{2}$): Sei $I = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{\sqrt{x+i}}{1+x^2}}_{=R(x)} dx$ mit dem Hauptzweig der komplexen $\sqrt{\ }$. Da $1+z^2 = (z+i)(z-i)$, $\mathrm{Res}_i(R) = \frac{\sqrt{z+i}}{z+i}\Big|_{z=i} = \frac{\sqrt{2i}}{2i} = \frac{1+i}{2i}$, gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{x+i}}{1+x^2}\, dx = 2\pi i\, \mathrm{Res}_i(R) = \pi(1+i).$$

<u>Satz</u> 3: Es sei $R = \frac{P}{Q}$ eine rationale Funktion, so dass

(i) $Q(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (ii) $\deg Q \geq \deg P + 1$.

$z_1, \dots, z_n$ seien die paarweise verschiedenen Nullstellen von Q in der oberen Halbebene. Dann gilt

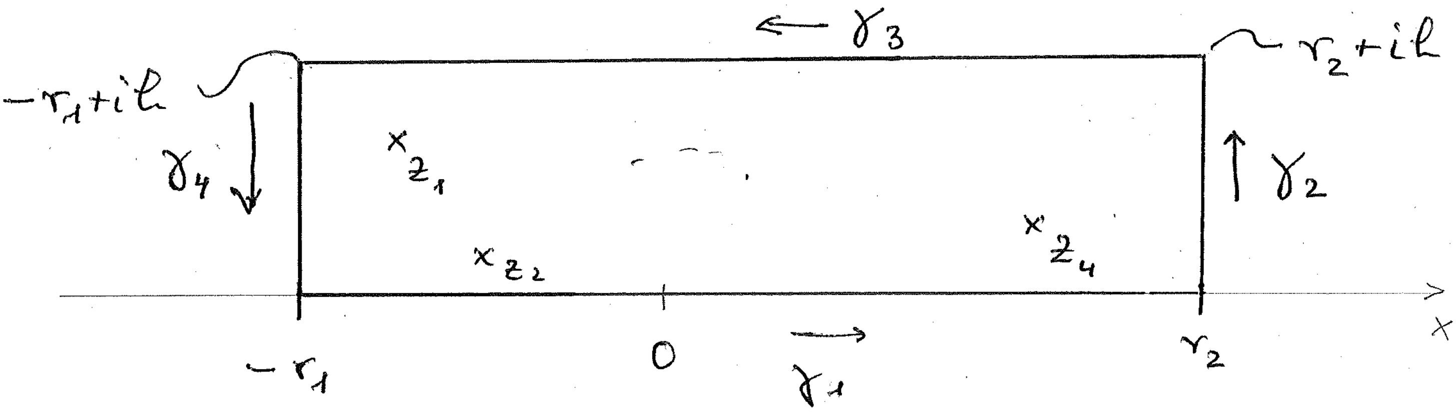
$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\cdot e^{ix}\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}_{z_k}(R\cdot e^{i\cdot}).$$

<u>Bem.</u>: Für $\deg Q = \deg P + 1$ konvergiert das uneigentliche Integral nicht absolut (bzw. existiert nicht als Lebesgue-Integral). In diesem Fall muss der nachfolgende Beweis also auch die Konvergenz des Integrals zeigen, was die Dinge ein <u>wenig</u> komplizierter macht.

<u>Bew.</u>: Es seien $r_1, r_2, h > 0$ und

$$\gamma := [-r_1, r_2, r_2 + ih, -r_1 + ih, -r_1] =: \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \gamma_3 \oplus \gamma_4$$

ein Rechteckweg, der alle $z_1, \dots, z_n$ umläuft.



Dann ergibt der Residuensatz

$$\int_{-r_1}^{r_2} R(x)\cdot e^{ix}dx - 2\pi i \sum_{k=1}^{u} \mathrm{Res}_{z_k}(R e^{i\cdot})$$

$$= -\int_{\gamma_2 \oplus \gamma_3 \oplus \gamma_4} R(z) e^{iz} dz$$

bzw.

$$\left| \int_{-r_1}^{r_2} R(x) e^{ix} dx - 2\pi i \sum_{k=1}^{u} \mathrm{Res}_{z_k}(R e^{i\cdot}) \right|$$

$$\leq \sum_{j=2}^{4} \int_{\gamma_j} |R(z)\cdot e^{iz}|\, dz .$$

Aufgrund der Voraussetzung (ii) steht uns für alle Integrale eine Abschätzung $|R(z)| \leq \frac{C}{|z|}$ zur Verfügung. Ferner ist für $z = x+iy$: $|e^{iz}| = e^{-y}$.

Im Einzelnen:

$z = r_2 + it,\ 0 \leq t \leq h$

$j=2$: $\displaystyle\int_{\gamma_2} |R(z)|\cdot|e^{iz}|\,dz = \int_0^h \frac{C}{|r_2+it|}\, e^{-t}\,dt$

$$\leq \frac{C}{r_2}\cdot \int_0^h e^{-t}dt \leq \frac{C}{r_2},$$

und ebenso erhält man für

$j=4$: $\displaystyle\int_{\gamma_4} |R(z) e^{iz}|\,dz \leq \frac{C}{r_1}.$

$j=3$: Wir parametrisieren $\gamma_3 : [0, r_1+r_2] \to \mathbb{C}$,

$t \mapsto \gamma_3(t) = r_2 + ih - t$, sodass

$$\int_{\gamma_3} |R(z) e^{iz}|dz \leq \frac{C}{h}\cdot \int_0^{r_1+r_2} e^{-h}dt = C\,\frac{r_1+r_2}{h}\cdot e^{-h}$$

Hierin wählen wir $h = r_1 + r_2$ und erhalten

$$\left| \int_{-r_1}^{r_2} R(x) e^{ix} dx - 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}_{z_k}(R e^{i\cdot}) \right|$$

$$\leq C \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + e^{-r_1 - r_2} \right) \to 0 \quad (r_{1,2} \to \infty),$$

letzteres auch, wenn $r_{1,2}$ unabhängig voneinander nach ∞ streben, was die Existenz des uneigentlichen Integrals zeigt.

Anwendung: Berechnung einer Fouriertransformierten

Für eine integrierbare Funktion $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ wird die Fouriertransformierte $\hat{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ definiert als

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\, dx .$$

Hierbei sind $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ und $x \cdot \xi = \sum_{j=1}^{n} x_j \xi_j$. Im folgenden Bsp. ist $n = 1$ und $f(x) = (1+x^2)^{-1}$. Dann ist

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix\xi}}{1+x^2} dx .$$

(i) Wegen $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(\infty) - \arctan(-\infty) = \pi$

erhalten wir $\hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \pi = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

(ii) Der Fall $\xi > 0$: Wir substituieren $t = -x\xi$, so dass „$dx = -\frac{1}{\xi} dt$" (das Vorzeichen wird zur „Korrektur" der Integralgrenzen verwendet) und

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix\xi}}{1+x^2} dx = \frac{1}{\xi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it}}{1+(\frac{t}{\xi})^2} dt = \xi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it}}{\xi^2+t^2} dt$$

eine „Polstelle" bei $t = i\xi$

$$\underset{\text{Satz 3}}{=} \xi \cdot 2\pi i \cdot \mathrm{Res}_{i\xi}\left(\frac{e^{it}}{t^2+\xi^2}\right) = \xi \cdot 2\pi i \cdot \frac{e^{-\xi}}{2i\xi} \quad \text{(Lemma 1, (2))}$$

$$= \pi e^{-\xi} \Longrightarrow \hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-\xi}.$$

(iii) $\xi < 0$: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix\xi}}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix|\xi|}}{1+x^2}\,dx = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix|\xi|}}{1+x^2}\,dx}$

$$\underset{\text{(ii)}}{=} \pi \cdot e^{-|\xi|} \Longrightarrow \hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-|\xi|},$$

was zugleich das Gesamtergebnis ist.

Satz 4: Es sei $R(v,w)$ eine rationale Funktion der komplexen Veränderlichen v und w sowie

$$f(z) := R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right).$$

Auf $\partial B_1(0)$ sollen keine Nullstellen des Nenners von f liegen. Dann ist

$$\int_0^{2\pi} R(\cos(t), \sin(t))\,dt = \int_{\partial B_1^+(0)} \frac{f(z)}{iz}\,dz.$$

Bem.: Zur Berechnung des Integrals rechts kann oft der Residuensatz herangezogen werden.

Bew.: $\displaystyle\int_{\partial B_1^+(0)} \frac{f(z)}{iz}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{it})}{i \cdot e^{it}} \cdot i \cdot e^{it}\,dt$

$$= \int_0^{2\pi} R\left(\frac{e^{2it}+1}{2e^{it}}, \frac{e^{2it}-1}{2ie^{it}}\right)dt = \int_0^{2\pi} R(\cos(t), \sin(t))\,dt$$

$\square$

Bsp.: Für $a>1$ soll das Integral $I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{a+\cos(x)}$ berechnet werden. Dazu setzen wir

$$R(v,w) = \frac{1}{a+v}.$$

Dann ist

$$f(z) = R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right) = \frac{1}{a+\frac{z^2+1}{2z}} = \frac{2z}{z^2+2az+1}$$ und

$$\frac{f(z)}{iz} = \frac{2}{i}\,\frac{1}{z^2+2az+1}.$$

Nullstellen des Nenners: $z_\pm = -a \pm \sqrt{a^2-1}$, wobei

$$|z_+| < 1 < |z_-|, \quad \mathrm{Res}_{z_+}\left(\frac{f(z)}{iz}\right) = \frac{2}{i}\,\frac{1}{z_+-z_-} = \frac{1}{i}\,\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}.$$

Damit ergibt sich nach Satz 4

$$I = \int_{\partial B_1(0)^+} \frac{f(z)}{iz}\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}_{z_+}\left(\frac{f(z)}{iz}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

Auch bestimmte uneigentliche Integrale über $(0,\infty)$ können mit Hilfe des Residuensatzes berechnet werden. Statt einen Satz zu formulieren, beschränken wir uns auf das folgende

Bsp.: Für $0<\lambda<1$ ist $\int_0^\infty \frac{x^{\lambda-1}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin(\lambda\pi)}$.

(Wegen $\lambda>0$ existiert $\int_0^1 \frac{x^{\lambda-1}}{1+x}\,dx$, wegen $\lambda<1$ auch das Integral $\int_1^\infty \frac{x^{\lambda-1}}{1+x}\,dx$.

Bew.: Mit dem Hauptzweig Log des Logarithmus definieren wir die Funktion

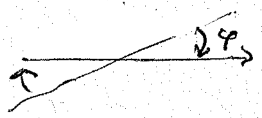
$$f(z) := \exp((\lambda-1)\cdot \mathrm{Log}(-z))\cdot \frac{1}{1+z}.$$

Dann ist f holomorph in $\mathbb{C}\setminus(\{-1\}\cup[0,\infty))$ und es gilt $\mathrm{Res}_{-1}(f) = \lim_{z\to -1} \exp((\lambda-1)\mathrm{Log}(-z)) = 1$.

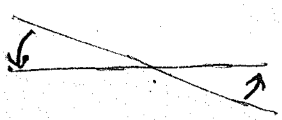
Ferner haben wir für $z = r\cdot e^{i\varphi}$ mit $r>0$ und $0<|\varphi|<\pi$:

$$\lim_{\varphi\searrow 0} f(r\cdot e^{i\varphi}) = \exp((\lambda-1)\lim_{\varphi\searrow 0}\mathrm{Log}(-r\cdot e^{i\varphi}))\cdot\frac{1}{1+r}$$

$$= \frac{r^{\lambda-1}}{1+r}\cdot \exp((\lambda-1)\lim_{\varphi\searrow 0}\mathrm{Log}(\underbrace{-e^{i\varphi}}_{=e^{i(\varphi-\pi)}}))$$



$$= \frac{r^{\lambda-1}}{1+r}\exp(-(\lambda-1)i\pi) \qquad (*)$$



während

$$\lim_{\varphi\nearrow 0} f(re^{i\varphi}) = \frac{r^{\lambda-1}}{1+r}\exp((\lambda-1)\lim_{\varphi\nearrow 0}\mathrm{Log}(\underbrace{-e^{i\varphi}}_{=e^{i(\pi+\varphi)}}))$$

$$= \frac{r^{\lambda-1}}{1+r}\exp((\lambda-1)i\pi). \qquad (**)$$

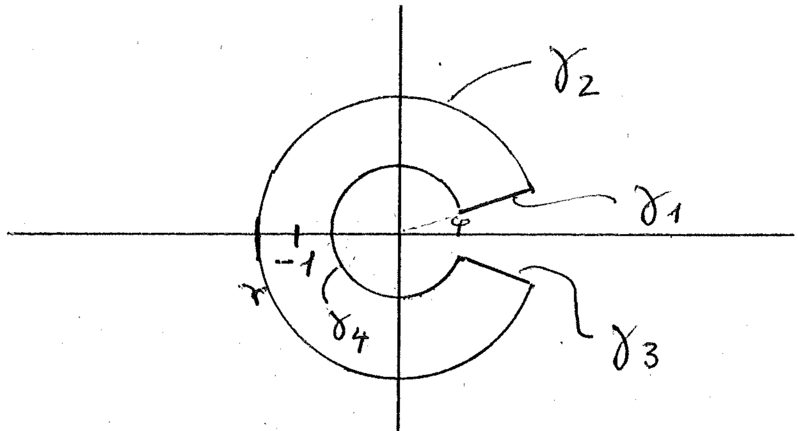
Wir integrieren f über einen Zyklus $\Gamma = \sum_{j=1}^{4}\gamma_j$ mit

$\gamma_1: [\frac{1}{r}, r] \to \mathbb{C},\ t\mapsto t\cdot e^{i\varphi}$

$\gamma_2: [\varphi, 2\pi-\varphi] \to \mathbb{C},\ t\mapsto re^{it}$

$\gamma_3 : [-r, -\frac{1}{r}] \to \mathbb{C},\ t \mapsto -t e^{-i\varphi}$ und

$\gamma_4 : [\varphi, 2\pi-\varphi] \to \mathbb{C},\ t \mapsto \frac{1}{r}\cdot e^{-it}$



Hierbei sei $r > 1$ und $0 < \varphi < \pi$, sodass $n(\Gamma, -1) = 1$.

Dann ergibt der Residuensatz

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{4} \int_{\gamma_j} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{-1}(f) = 2\pi i.$$

Für $z = \rho\cdot e^{i\psi}$ haben wir unabhängig von ψ die Abschätzung $|f(z)| \le \frac{\rho^{\lambda-1}}{1+\rho}$, so dass

$$\Big|\int_{\gamma_2} f(z)\,dz\Big| \le 2\pi \frac{r^\lambda}{1+r} \quad \text{und} \quad \Big|\int_{\gamma_4} f(z)\,dz\Big| \le \frac{2\pi}{r}\cdot\frac{r^{1-\lambda}}{1+\frac{1}{r}} = 2\pi\frac{r^{1-\lambda}}{1+r}.$$

Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ können wir also r_ε so groß wählen, dass für alle $r \ge r_\varepsilon$

$$\sup_{0<|\varphi|<\pi} \Big|\int_{\gamma_2} f(z)\,dz + \int_{\gamma_4} f(z)\,dz\Big| \le \varepsilon$$

bzw. $$\sup_{0<|\varphi|<\pi} \Big|\int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_3} f(z)\,dz - 2\pi i\Big| \le \varepsilon,$$

was auch im $\lim_{\varphi\searrow 0}$ seine Gültigkeit behält. Nun haben wir bei festem $r \geq r_\varepsilon$:

$$\lim_{\varphi \downarrow 0} \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_3} f(z)\,dz$$

$$= \lim_{\varphi \downarrow 0} \int_{\frac{1}{r}}^{r} \frac{t^{\lambda-1}}{1+te^{i\varphi}} \exp((\lambda-1)\operatorname{Log}(-e^{i\varphi}))\,dt$$

$$\underset{\text{von } \gamma_3'}{\overset{-}{\uparrow}} \lim_{\varphi \downarrow 0} \int_{\frac{1}{r}}^{r} \frac{t^{\lambda-1}}{1+te^{-i\varphi}} \exp((\lambda-1)\operatorname{Log}(-e^{-i\varphi}))\,dt$$

$$\underset{(*),(**)}{=} (\exp(-(\lambda-1)\pi i) - \exp((\lambda-1)\pi i)) \cdot \int_{\frac{1}{r}}^{r} \frac{x^{\lambda-1}}{1+x}\,dx$$

$$= -2i\sin((\lambda-1)\pi) \cdot \int_{\frac{1}{r}}^{r} \frac{x^{\lambda-1}}{1+x}\,dx = 2i\sin(\lambda\pi) \int_{\frac{1}{r}}^{r} \frac{x^{\lambda-1}}{1+x}\,dx$$

$$\Rightarrow \quad \left| 2i\sin(\pi\lambda) \cdot \int_{\frac{1}{r}}^{r} \frac{x^{\lambda-1}}{1+x}\,dx - 2\pi i \right| \leq \varepsilon$$

Im $\lim_{r \to \infty}$ gilt dies für jedes $\varepsilon > 0$, also ist

$$\int_0^\infty \frac{x^{\lambda-1}}{1+x}\,dx = \lim_{r \to \infty} \int_{\frac{1}{r}}^{r} \frac{x^{\lambda-1}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin(\lambda\pi)}. \qquad \square$$

Bem.: (1) Mit dieser Vorgehensweise lassen sich allgemeiner Integrale der Form $\int_0^\infty x^{\lambda-1} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ mit Polynomen P und Q berechnen, wenn

- Q auf $[0,\infty)$ keine Nullstellen besitzt und
- $\deg Q > \deg P + \lambda$ (und $\lambda > 0$) ist.

(2) Das hier diskutierte Bsp. ist für die Γ- und B-Funktion von Bedeutung: B ist für $\lambda, \mu > 0$ definiert als $\int_0^1 t^{\lambda-1}(1-t)^{\mu-1}\,dt =: B(\lambda,\mu)$.

und geht durch die Substitution $s = \frac{t}{1-t}$ bzw. $t = \frac{s}{s+1}$ mit $ds = \frac{dt}{(1-t)^2}$ bzw $\frac{ds}{s} = \frac{dt}{t(1-t)}$ über in

$$B(\lambda,\mu) = \int_0^\infty t(s)^\lambda (1-t(s))^\mu \frac{ds}{s} = \int_0^\infty \frac{s^{\lambda-1}}{(s+1)^{\lambda+\mu}}\,ds .$$

Speziell ergibt sich für $\mu = 1-\lambda \in (0,1)$:

$$B(\lambda, 1-\lambda) = \int_0^\infty \frac{s^{\lambda-1}}{1+s}\,ds = \frac{\pi}{\sin(\lambda\pi)} .$$

Zwischen der B- und der Γ-Funktion besteht die Beziehung

$$B(\lambda,\mu) = \frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda+\mu)} \qquad (\longrightarrow \text{Ana III}) ,$$

so dass wegen $\Gamma(1) = 1$ folgt

$$\Gamma(\lambda)\Gamma(1-\lambda) = B(\lambda, 1-\lambda) = \frac{\pi}{\sin(\lambda\pi)} .$$

Dies wird mitunter als "Ergänzungssatz" für die Γ-Funktion bezeichnet.

Als eine weitere Anwendung des Residuensatzes beweisen wir die Partialbruchentwicklung des Cotangens:

Satz 5: Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ gilt $\qquad (\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}!)$

$$\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2-n^2}.$$

Bem.: Aus $\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} = \frac{z}{n(z-n)}$ folgt die absolute Konvergenz der Reihe (bei festem z). In diesem Fall kann die Reihe nach Belieben umgeordnet werden, was die beiden letzten "="-Zeichen rechtfertigt. Ferner gilt für $|z| \le R \le \frac{|n|}{2}$: $\left|\frac{z}{n(z-n)}\right| \le \frac{2R}{n^2}$, was nach Weierstraß die normale Konvergenz zunächst von $\sum_{|n| \ge 2R} \frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}$ und damit die von $\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}$ bedeutet.

Bew.: Für festes $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ definieren wir

$$f(w) = \frac{z}{w(z-w)} \cdot \pi \cot(\pi w).$$

f ist holomorph in $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{Z} \cup \{z\})$. Die Residuen von f sind:

(i) für $w = n \in \mathbb{Z}^*$: $\operatorname{Res}_n(f) = \frac{z}{n(z-n)} \cdot \underbrace{\operatorname{Res}_n(\pi \cot(\pi \cdot))}_{=1,\text{ früheres Bsp.}}$

$$= \frac{z}{n(z-n)}$$

(ii) für $w = z$: $\lim_{w \to z} (w-z) \frac{z}{w(z-w)} \pi \cot(\pi w) = -\pi \cot(\pi z)$

(iii) für $w=0$: $\operatorname{Res}_0(f) = \frac{1}{z}$. $\left(f(w) \sim \frac{1}{w^2} \; (w \to 0)!\right)$

Zur Begründung von (iii) ziehen wir die Potenzreihendarstellung

$$x \cdot \cot(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} (-1)^n 4^n x^{2n} =: g(x)$$

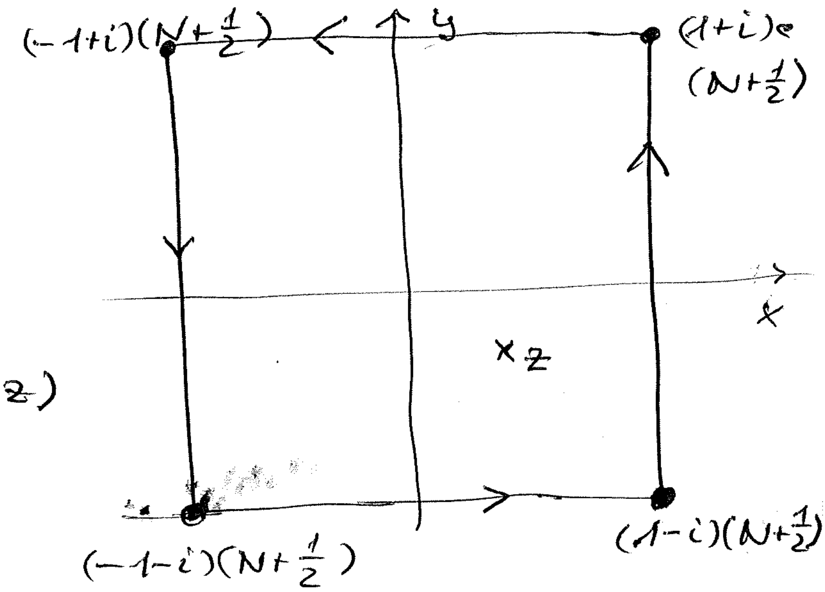
aus Abschnitt 8 (Satz 5) heran und erhalten (mit $x = \pi w$)

$$\operatorname{Res}_0(f) = \frac{d}{dw} w^2 f(w)\Big|_{w=0} = \frac{d}{dw}\left(\frac{z}{z-w} \cdot g(\pi w)\right)\Big|_{w=0}$$

$$= \frac{z}{(z-w)^2} \cdot \underbrace{g(\pi w)\Big|_{w=0}}_{=1} + \underbrace{\frac{d}{dw} g(\pi w)\Big|_{w=0}}_{=0} = \frac{z}{z^2} = \frac{1}{z}.$$

Jetzt integrieren wir f über den positiv orientierten Rand des Quadrats Q_N mit den Ecken $(\pm 1 \pm i)(N+\frac{1}{2})$, wobei $N \geq 2|z|$ aus $\mathbb{N}$ sei. Der Integrationsweg ist also

$$\gamma_N := [(1-i)(N+\tfrac{1}{2}), (1+i)(N+\tfrac{1}{2}), (-1+i)(N+\tfrac{1}{2}), (-1-i)(N+\tfrac{1}{2}), (1-i)(N+\tfrac{1}{2})]$$



Dann ergibt der Residuensatz:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_N} f(w)\,dw = -\pi \cot(\pi z) + \frac{1}{z} + \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}^* \\ |n| \leq N}} \frac{z}{n(z-n)}.$$

Alles, was zu tun bleibt, ist zu zeigen, dass

$$\lim_{N \to \infty} \int_{\gamma_N} f(w)\,dw = 0 .$$

Nun ergibt die Standardabschätzung

$$\Big| \int_{\gamma_N} f(w)\,dw \Big| \leq L(\gamma_N) \cdot \sup_{w \in \mathrm{Bild}(\gamma_N)} \Big| \frac{\pi z}{w(z-w)} \cdot \cot(\pi w) \Big|$$

$$\leq \pi |z| \; 4(2N+1) \cdot \frac{1}{N^2} \sup_{w \in \mathrm{Bild}(\gamma_N)} |\cot(\pi w)| ,$$

bleibt also z.z., dass $\sup\limits_{N \geq 2|z|+1} \sup\limits_{w \in \mathrm{Bild}(\gamma_N)} |\cot(\pi w)| < \infty$.

Dazu sei $w = u + iv$, wobei wir o.E. $v \geq 0$ annehmen.

$$\leadsto |\cot(\pi w)| = \left| \frac{e^{i\pi w} + e^{-i\pi w}}{e^{i\pi w} - e^{-i\pi w}} \right| = \frac{|e^{2\pi i w} + 1|}{|e^{2\pi i w} - 1|}$$

$$\leq \frac{1 + |e^{2\pi i w}|}{1 - |e^{2\pi i w}|} = \frac{1 + e^{-2\pi v}}{1 - e^{-2\pi v}} \leq 4, \text{ sofern } v \geq 1.$$

Für $v \leq 1$ befinden wir uns auf einer der senkrechten Strecken, und die Beschränktheit von $\cot(\pi w)$ – unabhängig von N – ergibt sich dort aus der π-Periodizität von cot.

$\square$