14. Das Nullstellenzählintegral und der Satz von Rouché

Def.: Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $0 \neq f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. $z_0 \in \Omega$ heißt eine Nullstelle der Ordnung m (oder auch: m-fache Nullstelle), wenn die Taylorreihe von f in z_0 die Form $\sum_{k=m}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$ mit $a_m \neq 0$ hat.

Bem.: Das ist genau dann der Fall, wenn die Funktion $g(z) := (z-z_0)^{-m} f(z)$ holomorph ist und $g(z_0) \neq 0$ gilt.

Satz 1: Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und γ ein geschlossener Weg in Ω, der in Ω nullhomolog ist. Weiter sei $A := \{ z \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Bild}(\gamma) : n(\gamma, z) = 1 \}$, und für alle $z \in \mathbb{C} \setminus (A \cup \mathrm{Bild}(\gamma))$ gelte $n(\gamma, z) = 0$. $f : \Omega \to \mathbb{C}$ sei holomorph und besitze in $\mathrm{Bild}(\gamma)$ keine Nullstellen. Dann ist

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} \, dz$$

gleich der Anzahl der Nullstellen von f in A unter Berücksichtigung der Vielfachheiten.

Bem.: Für den Fall, dass f ein Polynom ist und γ einen Kreis um $z_0 = 0$ beschreibt, haben Sie das bereits in der Übung gezeigt, vgl. A 33.

Bew.: γ ist nullhomolog in $\Omega \underset{\text{p.d.}}{\Longleftrightarrow} n(\gamma, z) = 0 \;\forall z \in \Omega^c$.

Also ist $A \subset \Omega$ und wegen $\partial A = \mathrm{Bild}(\gamma) \subset \Omega$ auch $\bar{A} \subset \Omega$. Insbes. ist f auf $\bar{A}$ definiert. Ferner ist $\bar{A}$ beschränkt und daher kompakt.

Nehmen wir $\#\{z \in A : f(z) = 0\} = \infty$ an, so hätte diese Nullstellenmenge in $\bar{A} \subset \Omega$ einen Häufungspunkt, nach dem Identitätssatz wäre also $f = 0$ in Ω, was ausgeschlossen ist. Daher gibt es nur endlich viele Nullstellen $z_1, \dots, z_n$ von f in A.

Der Residuensatz ergibt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}_{z_k}\left(\frac{f'}{f}\right).$$

Nun sei m_k die Ordnung der Nullstelle z_k. Dann gibt es eine holomorphe Funktion g mit $g(z_k) \neq 0$ und $f(z) = (z - z_k)^{m_k} \cdot g(z)$. Daher ist

$$f'(z) = m_k (z - z_k)^{m_k - 1} g(z) + (z - z_k)^{m_k} \cdot g'(z)$$

$$\rightsquigarrow \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m_k}{z - z_k} + \frac{g'(z)}{g(z)},$$ wobei $\frac{g'}{g}$ holomorph in z_k ist.

$$\rightsquigarrow \mathrm{Res}_{z_k}\left(\frac{f'}{f}\right) = m_k \rightsquigarrow \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \sum_{k=1}^{n} m_k,$$

wie behauptet. □

Fast als Folgerung aus Satz 1 erhält man:

Satz 2 (Rouché): Es seien Ω, γ und A wie in Satz 1. $f, g: \Omega \to \mathbb{C}$ seien holomorphe Funktionen, so dass für alle $z \in \operatorname{Bild}(\gamma)$:

(i) $f(z) \neq 0$ und (ii) $|f(z) - g(z)| < |f(z)| + |g(z)|$.

Dann besitzen f und g in A unter Berücksichtigung der Vielfachheiten gleich viele Nullstellen.

Bew.: Wir zeigen für $z \in \operatorname{Bild}(\gamma)$ und $t \in [0,1]$, dass

$$(1-t) f(z) + t g(z) \neq 0.$$

Nehmen wir Gleichheit an, folgen

$$f(z) = t(f(z) - g(z)) \quad \text{und} \quad g(z) = (1-t)(g(z) - f(z)).$$

Hieraus ergibt sich ein Widerspruch zur Voraussetzung

$$|f(z)| + |g(z)| = (t + 1 - t)\,|f(z) - g(z)|.$$

Damit ist für $t \in [0,1]$ das Integral $\int_\gamma \frac{t f'(z) + (1-t) g'(z)}{t f(z) + (1-t) g(z)}\,dz$ wohldefiniert und die Abbildung

$$\phi : [0,1] \xrightarrow[\text{Satz 1}]{} \mathbb{Z},\ t \mapsto \phi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{t f'(z) + (1-t) g'(z)}{t f(z) + (1-t) g(z)}\,dz$$

stetig und also konstant. Mit Satz 1 folgt die Beh.

$\square$.

Bem. + Bsp.: (1) Der Satz von Rouché dient der Lokalisierung von Nullstellen holomorpher Funktionen. In der Lehrbuchliteratur werden zumeist Polynome

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

mit $a_n \neq 0 \neq a_0$ betrachtet. Will man die Lage der Nullstellen von P eingrenzen, scheint es naheliegend, zuerst einen möglichst engen Kreisring $\overline{K_{r,R}(0)}$ zu suchen, in dem alle Nullstellen liegen. Eine grobe Abschätzung in Abschnitt 8.4, Lemma 2 hat bereits ergeben, dass

$$R \leq \max\left(1, \frac{1}{|a_n|} \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\right).$$

Schätzt man mit der Dreiecksungleichung weniger großzügig ab, erhält man

$$|P(z)| = |z|^n \cdot \left| \sum_{k=0}^{n} a_k z^{k-n} \right| \geq |z|^n \left(|a_n| - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| |z|^{k-n} \right).$$

Es gibt also keine Nullstellen von P, wenn

$$|a_n| - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| |z|^{k-n} > 0 \qquad \text{ist.}$$

D.h.: Alle Nullstellen von P liegen in $\overline{B_R(0)}$, wenn R die Nullstelle der streng monoton steigenden Funktion

$$\phi : (0,\infty) \to \mathbb{R},\ t \mapsto \phi(t) := |a_n| - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| t^{k-n}$$

ist. Ebenso führt die Abschätzung

$$|P(z)| \geq |a_0| - \sum_{k=1}^{n} |a_k|\,|z|^k$$

darauf, dass in $B_r(0)$ keine Nullstellen von P liegen, wenn r die Nullstelle der streng monoton fallenden Funktion

$$\varphi : [0,\infty) \to \mathbb{R},\ t \mapsto \varphi(t) := |a_0| - \sum_{k=1}^{n} |a_k|\, t^k \quad \text{ist.}$$

Damit liegen alle Nullstellen von P in $\overline{K_{r,R}(0)}$.

Diese schlichten Erkenntnisse werden mitunter als beispielhafte Anwendungen des Satzes von Rouché präsentiert, der in der Tat mit $g = P$ und $f(z) = a_n z^n$ bzw. $f(z) = a_0$ zum selben Ergebnis führt. (Nun sind r und R wie oben i. Allg. nicht leicht zu ermitteln. Um etwas Handhabbares herauszubekommen, wird man weiter abschätzen, was einen Verlust an Genauigkeit bedeutet.)

Das Argument oben erlaubt Variationen: Wenn z. B. einer der Koeffizienten a_{k_0} dem Betrage nach die anderen deutlich dominiert, so ergibt

$$|P(z)| \geq |z|^{k_0} \Big(|a_{k_0}| - \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq k_0}}^{n} |a_k|\,|z|^{k-k_0} \Big) \overset{!}{>} 0$$

einen Kreisring $K_{s_1,s_2}(0) \subset \overline{K_{r,R}(0)}$, innerhalb dessen es ebenfalls keine Nullstellen von P gibt. In dieser Situation liefert der Satz von

Rouché – angewendet ist $g = P$ und $f(z) = a_{k_0} z^{k_0}$ – dass in $\overline{K_{r,8_1}(0)}$ k_0 Nullstellen von P liegen.

(2) Ein konkretes Bsp.[1]: $P(z) = z^4 + 6z + 3$

- Wir haben $|P(z)| \geq |z|^4 - 6|z| - 3$, was für $|z| \geq 2$ positiv ist $(16 > 15)$, also können wir $\underline{R = 2}$ wählen.
- Zum anderen ist $|P(z)| \geq 3 - 6|z| - |z|^4$, was für $|z| = \frac{1}{2}$ negativ, aber für $|z| = \frac{1}{3}$ positiv ist. Etwas genauer hinschauen: $3 - 6 \cdot \frac{2}{5} - (\frac{2}{5})^4 = \frac{3}{5} - (\frac{2}{5})^4 > 0$. Wir wählen $r = \frac{2}{5}$.

Zwischenergebnis: Alle Nullstellen von P liegen in dem offenen Kreisring $K_{\frac{2}{5},2}(0)$.

- Schließlich haben wir $|P(z)| \geq 6|z| - 3 - |z|^4$, was positiv ist für $|z| = 1$ und wenn

(i) $|z| > 1$ und $|z|^3 + \frac{3}{|z|} \leq 6 \Leftarrow |z|^3 \leq 3 \Leftrightarrow |z| \leq \sqrt[3]{3}$

oder (ii) $|z| < 1$ und $\frac{3}{|z|} + |z|^3 \leq \frac{3}{|z|} + 1 \leq 6 \Leftrightarrow |z| \geq \frac{3}{5}$

Zweites Teilergebnis: Alle Nullstellen von P liegen in $K_{\frac{2}{5},2}(0) \setminus \overline{K_{\frac{2}{5},\sqrt[3]{3}}(0)}$

- Jetzt ziehen wir den Satz von Rouché heran mit $f(z) = 6z$ und $g(z) = P(z)$. Dann ist für $|z| = 1$:

(i) $|f(z)| = 6 \neq 0$ und (ii) $|P(z) - f(z)| \leq 3 + |z|^4 \overset{\text{s.o.}}{<} |f(z)| \leq |f(z)| + |P(z)|$

---

[1] Aus Freitag-Busam, etwas anders diskutiert. S. 174

Die Voraussetzungen des Satzes sind also erfüllt, und $f(z)=6z$ und P haben in $B_1(0)$ gleich viele Nullstellen, nämlich eine.

Zsf.: P besitzt 4 Nullstellen, davon

- eine reelle in $K_{\frac{2}{5},\frac{3}{5}}(0)$ ← TR-Bu., p. 175 $z_1=-0{,}511399\ldots$
- drei in $K_{\sqrt[3]{3},2}(0)$, davon ist mindestens eine reell.

(3) Eine etwas andere Anwendung: Existenz und Eindeutigkeit eines Fixpunktes

Es sei $\overline{B_1(0)}\subset\Omega\subset\mathbb{C}$ für einen Bereich Ω und $h:\Omega\to\mathbb{C}$ holomorph mit $h(\overline{B_1(0)})\subset B_1(0)$.

Beh.: Für jedes $n\in\mathbb{N}$ hat die Gleichung $h(z)=z^n$ in $B_1(0)$ genau n Lösungen. Insbesondere hat h in $B_1(0)$ genau einen Fixpunkt.

Bew.: Wir setzen $f(z)=z^n$ und $g(z)=h(z)-z^n$. Dann gilt für alle $z\in\partial B_1(0)$:

$$|f(z)-g(z)|=|h(z)|<1=|f(z)|\leq|f(z)|+|g(z)|$$

Nach dem Satz von Rouché haben f und g in $B_1(0)$ gleich viele Nullstellen, nämlich n Stück. Jede Nullstelle von g ist eine Lösung von $h(z)=z^n$ und umgekehrt. $\rightsquigarrow$ Beh.