15. Isolierte Singularitäten und meromorphe Funktionen

(158)

Def.: $z_0 \in \mathbb{C}$ heißt eine isolierte Singularität einer Funktion $f: \mathbb{C} \supset \Omega \to \mathbb{C}$, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $f \in K_{0,\varepsilon}(z_0)$ holomorph ist.

Bem.: In diesem Fall besitzt f in $K_{0,\varepsilon}(z_0)$ eine Laurentreihendarstellung

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z-z_0)^n. \qquad (*)$$

Isolierte Singularitäten werden in folgender Weise klassifiziert:

Def.: Eine isolierte Singularität z_0 einer Funktion f (wie oben) heißt

(a) <u>hebbar</u>, wenn in $(*)$ $a_n = 0$ für alle $n < 0$ gilt,

(b) eine <u>Polstelle</u> (oder kurz: ein Pol) <u>der Ordnung</u> $m \in \mathbb{N}$, wenn $a_n = 0$ für alle $n < -m$ und $a_{-m} \neq 0$ ist,

(c) <u>wesentlich</u> in allen anderen Fällen.

Bsp.: (1) $f(z) = \dfrac{\sin(z)}{z} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k}$ besitzt in $z_0 = 0$ eine hebbare Singularität. (Wie man an der Potenzreihe erkennt, kann man nach $z_0 = 0$ holomorph durch $f(0) = 1$ fortsetzen.)

(2) $f(z) = \frac{\cos(z)-1}{z^5} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k-5}$ besitzt in

$z_0 = 0$ eine Polstelle 3. Ordnung.

(3) $f(z) = e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{z^n} = \sum_{n=-\infty}^{0} \frac{1}{(-n)!} z^n$ besitzt

in $z_0 = 0$ eine wesentliche Singularität.

Bem.: Im folgenden seien $z_0 \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$ und $m \in \mathbb{N}$.

(1) Eine in $K_{0,\varepsilon}(z_0)$ holomorphe Funktion f hat in z_0 genau dann einen Pol der Ordnung m, wenn es eine in $B_\varepsilon(z_0)$ holomorphe Funktion h gibt mit $h(z_0) \neq 0$ und $f(z) = (z-z_0)^{-m} h(z)$.

(Denn es ist $f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ mit $a_{-m} \neq 0$

g.d.w. $f(z) = (z-z_0)^{-m} h(z)$ mit $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-m} (z-z_0)^n$,

wobei $h(z_0) = a_{-m} \neq 0$.)

(2) Wenn f in z_0 eine Nullstelle der Ordnung m besitzt, hat $\frac{1}{f}$ in z_0 einen Pol der Ordnung m (und umgekehrt).

Denn: $f(z) = (z-z_0)^m \cdot g(z)$ mit $g(z_0) \neq 0$. Jetzt Bem. (1) mit $h = \frac{1}{g}$.

(3) Ist f in $K_{0,\varepsilon}(z_0)$ holomorph und beschränkt, so lässt sich f holomorph auf $B_\varepsilon(z_0)$ fort-

setzen – das ist die Aussage des Riemannschen Hebbarkeitssatzes. In diesem Fall besitzt f eine Potenzreihenentwicklung $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, also – mit den neu eingeführten Begriffen ausgedrückt – eine hebbare Singularität.

Analog dazu kann eine Polstelle durch das Wachstumsverhalten in einer punktierten Umgebung charakterisiert werden:

Satz 1: Es seien $\varepsilon > 0$, $z_0 \in \mathbb{C}$ und $f : K_{0,\varepsilon}(z_0) \to \mathbb{C}$ holomorph. f besitzt in z_0 genau dann einen Pol der Ordnung $m \in \mathbb{N}$, wenn es $\delta > 0$ und $C_{1,2} > 0$ gibt, so dass für alle $z \in K_{0,\delta}(z_0)$ gilt

$$C_1 |z-z_0|^{-m} \leq |f(z)| \leq C_2 |z-z_0|^{-m}. \qquad (*)$$

Bew.: "$\Rightarrow$" Besitzt f in z_0 einen Pol der Ordnung $m \in \mathbb{N}$, so gibt es auf $K_{0,\varepsilon}(z_0)$ eine Laurententwicklung

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = (z-z_0)^{-m} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-m} (z-z_0)^n$$

mit $0 \neq a_{-m} = \lim_{z \to z_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-m} (z-z_0)^n$. Wir wählen $C_1 := \frac{|a_{-m}|}{2}$ und $C_2 := \frac{3|a_{-m}|}{2}$ sowie $\delta > 0$, so dass für alle $z \in K_{0,\delta}(z_0)$ gilt

$$C_1 \leq \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-m} (z-z_0)^n \right| \leq C_2$$

Dann ergibt Multiplikation mit $|z-z_0|^{-m}$ die Ungleichung (*).

„$\Leftarrow$" Wir setzen $h(z) := (z-z_0)^m \cdot f(z)$. Dann ist auf $K_{0,\delta}(z_0)$ nach (*) $|h(z)| \leq C_2$, also h auf $B_\delta(z_0)$ holomorph fortsetzbar, und für die Fortsetzung $\tilde{h}$ gibt es eine Potenzreihendarstellung

$$\tilde{h}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n,$$

wobei aufgrund der linken Seite von (*) gilt $|\tilde{h}(z_0)| = |b_0| \geq C_1 > 0$. Dann ist

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

mit $a_n = b_{n+m}$, speziell $a_{-m} = b_0 \neq 0$. $\square$

Für wesentliche Singularitäten gilt:

Satz 2 (Casorati-Weierstraß): Es seien $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ und $f : K_{0,r}(z_0) \to \mathbb{C}$ holomorph mit einer wesentlichen Singularität bei z_0. Dann ist $f(K_{0,r}(z_0))$ eine dichte Teilmenge von $\mathbb{C}$.

Bew.: Annahme, $f(K_{0,r}(z_0))$ sei nicht dicht in $\mathbb{C}$. Dann gibt es ein $w \in \mathbb{C}$ und ein $\varepsilon > 0$, so dass $B_\varepsilon(w) \cap f(K_{0,r}(z_0)) = \emptyset$. Also definiert $g(z) := \frac{1}{f(z)-w}$ eine in $K_{0,r}(z_0)$ holomorphe Funktion, die durch $|g(z)| = \frac{1}{|f(z)-w|} \leq \frac{1}{\varepsilon}$ beschränkt ist. Aufgrund des Hebbarkeitssatzes gibt es eine holomorphe Fortsetzung $\tilde{g} : B_\varepsilon(z_0) \to \mathbb{C}$ mit Potenzreihendarstellung

$$\tilde{g}(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \text{wobei } m \in \mathbb{N}_0,\ a_m \neq 0.$$

Dann besitzt $\frac{1}{g}$ in z_0 eine hebbare Singularität (im Fall $m=0$) oder einen Pol der Ordnung $m \in \mathbb{N}$. Desgleichen für $f = \frac{1}{g} + w$, im Widerspruch zur Voraussetzung. □

Bsp.: $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$. Zu $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ existiert ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $e^\lambda = w$. Für $z_n = \frac{1}{\lambda + 2\pi i n}$ gilt dann: $\lim_{n \to \infty} z_n = 0$ und $f(z_n) = e^{\lambda + 2\pi i n} = e^\lambda = w$, so dass w in jeder noch so kleinen punktierten Nullumgebung ein Urbild unter f besitzt. — Die Situation in diesem Bsp. ist typisch, denn es gilt die folgende wesentliche Verschärfung des Satzes von Casorati-Weierstraß:

„Großer Satz von Picard": Es sei z_0 eine wesentliche Singularität einer Funktion f. Dann nimmt f in jeder punktierten Umgebung von z_0 jeden Wert $w \in \mathbb{C}$ mit höchstens einer Ausnahme an.

(Für den recht umfangreichen Bew. sei verwiesen auf: Remmert, Schumacher; Band 2, Kap 10, § 4.)

Def.: Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $P \subset \mathbb{C}$ höchstens abzählbar und ohne Häufungspunkte in Ω. Eine holomorphe Funktion $f: \Omega \setminus P \to \mathbb{C}$, die in allen Punkten $z \in P$ einen Pol hat, heißt <u>meromorph</u> auf Ω. Die Menge P nennt man die <u>Polstellenmenge</u> von f und schreibt ggf. P_f statt P.

Bez.: Die Menge aller meromorphen Funktionen auf einer offenen Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{C}$ bezeichnen wir mit $\mathcal{M}(\Omega)$. Sie umfasst die Menge $\mathcal{O}(\Omega)$ aller holomorphen Funktionen auf Ω.

Bem.: (1) Der Definitionsbereich von $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ ist $\Omega \setminus P_f$.

(2) Auf $\mathcal{M}(\Omega)$ wird in folgender Weise eine (punktweise) Addition erklärt: Seien $f, g \in \mathcal{M}(\Omega)$ mit Polstellenmengen P_f und P_g. Für $z \in \Omega \setminus (P_f \cup P_g)$ definiert man

$$(f+g)(z) := f(z) + g(z)$$

und setzt

$$P_{f+g} := P_f \cup P_g \setminus \{z \in P_f \cup P_g : z \text{ ist eine hebbare Singularität von } f+g\}$$

sowie, für $z \in \Omega \setminus P_{f+g}$,

$$(f+g)(z) := \begin{cases} f(z) + g(z) & : z \in \Omega \setminus (P_f \cup P_g) \\ \lim\limits_{w \to z} f(w) + g(w) & : z \in (P_f \cup P_g) \setminus P_{f+g}. \end{cases}$$

In gleicher Weise wird eine Multiplikation eingeführt.

(3) $(\mathcal{M}(\Omega), +, \cdot)$ ist ein kommutativer Ring mit Einselement (der konstanten Funktion 1).

Ist $(\mathcal{M}(\Omega), +, \cdot)$ ein Körper?

Jedenfalls nicht für beliebige offene Mengen: Ist z. B. $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ mit disjunkten, nichtleeren und offenen Zusammenhangskomponenten Ω_1 und Ω_2, so gilt für die charakteristischen Funktionen

$$\chi_{\Omega_i}(z) := \begin{cases} 1 & \text{für } z \in \Omega_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

dass $\chi_1 \cdot \chi_2 = 0$, obwohl $\chi_1 \neq 0 \neq \chi_2$. In diesem Fall ist also $\mathcal{O}(\Omega)$ und damit auch $\mathcal{M}(\Omega)$ nicht nullteilerfrei und daher $\mathcal{M}(\Omega)$ kein Körper. Wenn hingegen Ω zusammenhängend ist, so ist dieses Problem beseitigt und tatsächlich gilt

Satz 3: Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Dann ist $(\mathcal{M}(G), +, \cdot)$ ein Körper.

Bew.: Zu zeigen ist die Existenz multiplikativer Inverser. Dazu sei $0 \neq f \in \mathcal{M}(G)$ mit Polstellenmenge P_f. Wir definieren

$$P_g := \{ w \in G \setminus P_f : f(w) = 0 \}$$

$$g : G \setminus P_g \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto g(z) := \begin{cases} \frac{1}{f(z)} & : z \notin P_f \\ 0 & : z \in P_f \end{cases}.$$

Zu zeigen ist, dass P_g in G keinen Häufungspunkt besitzt. Nehmen wir die Existenz eines solchen $z_0 \in G$ mit $z_n \to z_0$, $(z_n)_n$ in P_g, an, so folgt: $z_0 \notin G \setminus P_f$, denn sonst wäre nach dem Identitätssatz $f = 0$. Also $z_0 \in P_f$ und damit nach Satz 1 für ein $m \in \mathbb{N}$ und $C > 0$

$$0 = |f(z_n)| \geq \frac{1}{C} |z_n - z_0|^{-m}.$$

Daher besitzt P_g in G keinen Häufungspunkt und besteht nur aus isolierten Singularitäten. Da f in $w \in P_g$ in eine Potenzreihe $\sum_{n=m}^{\infty} a_n (z-w)^n$ mit $a_m \neq 0$ entwickelbar ist, handelt es sich bei w um eine Polstelle. g ist also meromorph. $\square$