16. Möbiustransformationen

Zunächst sei an zwei Begriffe aus der linearen Algebra erinnert:

<u>Def.</u>: Es sei $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ oder $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ und $n\in\mathbb{N}$.

(a) Die allgemeine lineare Gruppe $GL_n(\mathbb{K})$ ist definiert als die Gruppe $\{A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n} : a_{ij}\in\mathbb{K}, \det A\neq 0\}$ aller invertierbaren $n\times n$-Matrizen.

(b) Die spezielle lineare Gruppe $SL_n(\mathbb{K})$ ist die Untergruppe $SL_n(\mathbb{K}) := \{A\in GL_n(\mathbb{K}) : \det A = 1\}$.

<u>Def.</u>: Sei $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le 2}\in GL_2(\mathbb{C})$. Dann heißt die meromorphe Funktion

$$f_A : \mathbb{C}\setminus\left\{-\frac{a_{22}}{a_{21}}\right\}\to\mathbb{C},\quad z\mapsto f_A(z) := \frac{a_{11}z+a_{12}}{a_{21}z+a_{22}}$$

eine <u>Möbiustransformation</u>. (MT)

<u>Bem.</u>: (1) Wegen $\det A\neq 0$ ist $a_{21}=a_{22}=0$ ausgeschlossen. Eine MT ist also

- ganz, wenn $a_{21}=0$, oder
- meromorph mit einem einfachen Pol in $-\frac{a_{22}}{a_{21}}$, wenn $a_{21}\neq 0$ ist.

(Der Fall $a_{21}=0$ sei in der obigen Def. also zugelassen mit Definitionsbereich $\mathbb{C}$.)

(2) Ist $B=\lambda A$ mit einem $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, so ist $f_A=f_B$. Man kann also stets $\det A=1$, d.h. $A\in SL_2(\mathbb{C})$ annehmen bzw. verlangen.

(3) Die Menge aller MTen bildet mit der Verknüpfung von Abbildungen eine (nicht kommutative) Gruppe. Wegen

$$f_A\circ f_B = f_{AB} \qquad \text{(nachrechnen!)}$$

ist die Abbildung

$$\phi : SL_2(\mathbb{C}) \to \{MT\},\quad A \mapsto f_A$$

ein Gruppenisomorphismus.

(4) Speziell gilt $f_A^{-1}=f_{A^{-1}}$, genauer im Fall $a_{21}\neq 0$:

$$f_A : \mathbb{C}\setminus\left\{-\frac{a_{22}}{a_{21}}\right\} \to \mathbb{C}\setminus\left\{\frac{a_{11}}{a_{21}}\right\},\quad z\mapsto f_A(z)=\frac{a_{11}z+a_{12}}{a_{21}z+a_{22}}$$

hat die Inverse

$$f_A^{-1} : \mathbb{C}\setminus\left\{\frac{a_{11}}{a_{21}}\right\} \to \mathbb{C}\setminus\left\{-\frac{a_{22}}{a_{21}}\right\},\quad z\mapsto f_{A^{-1}}(z)=\frac{a_{22}z-a_{12}}{-a_{21}z+a_{11}}$$

<u>Bsp.</u>: (1) $a_{21}=0$, $a_{11}\cdot a_{22}=1$: Orientierungserhaltende affin-lineare Transformationen (ganz).

(2) $a_{11}=a_{22}=0$, $a_{12}=-a_{21}\neq 0$: $z\mapsto -\frac{1}{z}$.

Wenden wir uns jetzt einem speziellen Typ von Möbius-transformationen zu. Dazu sei

$$\mathbb{H} := \{z = x+iy \in \mathbb{C} : y>0\}$$

die obere Halbebene und, für $c\in\mathbb{H}$,

$$f_c : \mathbb{C}\setminus\{\bar c\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto f_c(z) := \frac{z-c}{z-\bar c}.$$

Eine zugehörige 2×2-Matrix ist hier

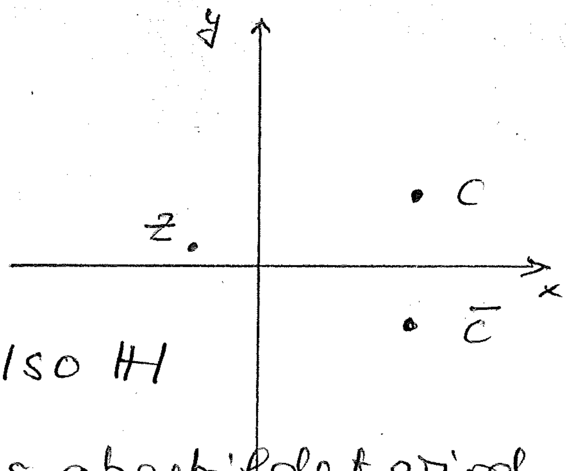
$$C = \begin{pmatrix}1 & -c\\ 1 & -\bar c\end{pmatrix},$$

die allerdings die Determinante $c-\bar c \neq 1$ hat. Die Inverse ist

$$C^{-1} = \frac{1}{c-\bar c}\begin{pmatrix}-\bar c & c\\ -1 & 1\end{pmatrix},$$

woraus sich $f_c^{-1}(w) = \dfrac{-\bar c w + c}{-w+1}$ für $w\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$ ergibt (die Determinante in Zähler und Nenner kann man kürzen).

<u>Satz 1</u>: Für jedes $c\in\mathbb{H}$ bildet f_c $\mathbb{H}$ biholomorph auf $B_1(0)$ ab.



<u>Bew.</u>: Für $z\in\mathbb{H}$ und $c\in\mathbb{H}$ ist $|z-c|<|z-\bar c|$ und also $|f_c(z)| = \left|\dfrac{z-c}{z-\bar c}\right| < 1$, so dass also $\mathbb{H}$ von f_c <u>in</u> den Einheitskreis abgebildet wird.

Nun sei $w \in B_1(0)$. Dann ergibt sich für die o.g. Umkehrabbildung

$$\operatorname{Im}\left(f_c^{-1}(w)\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{-\overline{c}w + c}{-w+1} \; \frac{1-\overline{w}}{1-\overline{w}}\right)$$

$$= \frac{1}{|1-w|^2} \operatorname{Im}\left(c - \underbrace{(\overline{c}w + \overline{w}c)}_{\in \mathbb{R}} + \overline{c}|w|^2\right)$$

$$= \frac{1}{|1-w|^2} \cdot \underbrace{\operatorname{Im}(c)}_{\substack{>0, \\ \text{da } c \in \mathbb{H}}} \cdot \underbrace{(1-|w|^2)}_{>0, \text{ da } |w|<1.} > 0$$

Also hat w ein Urbild unter f_c in $\mathbb{H}$, somit ist

$$f_c\big|_{\mathbb{H}} : \mathbb{H} \to B_1(0)$$

bijektiv. Die Holomorphie in beide Richtungen ist ablesbar. $\square$

<u>Bez.</u>: Für $c = i$ heißt die Abbildung $f_i : \mathbb{H} \to B_1(0)$, $z \mapsto f_i(z) := \frac{z-i}{z+i}$ die <u>Cayley-Transformation</u>, ihre Inverse ist gegeben durch $f_i^{-1}(w) = i\,\frac{1+w}{1-w}$.

<u>Def.</u>: Ein <u>Automorphismus</u> eines Gebietes $G \subset \mathbb{C}$ ist eine biholomorphe Abbildung von G auf sich. Die Menge aller Automorphismen eines Gebietes G bildet mit der Verknüpfung von Abbildungen eine Gruppe. Diese heißt die

Automorphismengruppe von G und wird mit $Aut(G)$ bezeichnet.

Im folgenden sollen die Automorphismengruppen von $\mathbb{H}$ und $B_1(0)$ bestimmt werden.

Lemma 1: (1) Für $A \in SL_2(\mathbb{R})$ ist $f_A \in Aut(\mathbb{H})$.

(2) $\mathcal{J}_0 := \{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar\beta & \bar\alpha \end{pmatrix} : |\alpha|^2 > |\beta|^2 \}$ ist eine Untergruppe von $GL_2(\mathbb{C})$.

(3) Für $A \in \mathcal{J}_0$ ist $f_A \in Aut(B_1(0))$.

Bew.: (1) Für $A \in SL_2(\mathbb{R})$ und $z = x+iy \in \mathbb{H}$ ist

$$f_A(z) = \frac{a_{11} z + a_{12}}{a_{21} z + a_{22}} \cdot \frac{a_{21}\bar z + a_{22}}{a_{21}\bar z + a_{22}} = \frac{1}{|a_{21} z + a_{22}|^2} \cdot (\quad) \text{ mit}$$

$$(\quad) = a_{11} a_{21} |z|^2 + a_{12} a_{22} + a_{11} a_{22} z + a_{12} a_{21} \bar z \text{, also}$$

$$\mathrm{Im}(\quad) = (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) y = \det A\, y = y > 0.$$

f_A bildet $\mathbb{H}$ nach $\mathbb{H}$ ab. Dasselbe gilt für $f_A^{-1} = f_{A^{-1}}$, also ist $f_A \in Aut(\mathbb{H})$.

(2) Offenbar ist $E_2 \in \mathcal{J}_0$ und mit $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar\beta & \bar\alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{J}_0$

auch $A^{-1} = \frac{1}{|\alpha|^2 - |\beta|^2} \begin{pmatrix} \bar\alpha & -\beta \\ -\bar\beta & \alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{J}_0$. Abgeschlossenheit:

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \bar\beta & \bar\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma & \delta\\ \bar\delta & \bar\gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\gamma+\beta\bar\delta & \alpha\delta+\beta\bar\gamma\\ \bar\beta\gamma+\bar\alpha\bar\delta & \bar\beta\delta+\bar\alpha\bar\gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mu & \lambda\\ \bar\lambda & \bar\mu\end{pmatrix},$$

wobei μ und λ als Einträge in der ersten Zeile definiert seien. Die Ungleichung für das Produkt folgt aus dem Determinantenmultiplikationssatz.

(3) Es ist

$$|f_A(z)|^2 = \frac{\alpha z+\beta}{\bar\beta z+\bar\alpha}\cdot\frac{\bar\alpha\bar z+\bar\beta}{\beta\bar z+\alpha} = \frac{|\alpha|^2|z|^2+2\,\mathrm{Re}(\alpha z\bar\beta)+|\beta|^2}{|\beta|^2|z|^2+2\,\mathrm{Re}(\alpha z\bar\beta)+|\alpha|^2}.$$

Also

$$|f_A(z)|<1 \iff |\alpha|^2|z|^2+|\beta|^2 < |\beta|^2|z|^2+|\alpha|^2$$

$$\iff (|\alpha|^2-|\beta|^2)(|z|^2-1)<0 \underset{|\alpha|>|\beta|}{\iff} |z|<1.$$

D.h. $f_A(B_1(0))\subset B_1(0)$. Da mit f_A auch $f_A^{-1}=f_{A^{-1}}\in\mathcal{J}$, gilt auch $B_1(0)\subset f_A(B_1(0))$. □

Satz 2: Jedes $f\in \mathrm{Aut}(B_1(0))$ mit $f(0)=0$ ist von der Form $f(z)=\lambda z$ für ein $\lambda\in\mathbb{C}$ mit $|\lambda|=1$.

(Diese Abbildungen werden wir fortan Drehungen nennen.)

Zum Bew. verwenden wir das (in den Übungen bewiesene) Lemma von Schwarz: Ist $f: B_1(0)\to B_1(0)$ holomorph mit $f(0)=0$, so gelten $|f(z)|\le|z|$ und $|f'(0)|\le 1$.

(Die Teilaussage $|g(z)| \le 1$ für $g(z) = \frac{f(z)}{z}$ steht zwar nicht explizit in der Aufgabenstellung, wurde aber bei der Besprechung gezeigt.)

Nun sei $z \in B_1(0)$ und $w = f(z) \in B_1(0)$. Dann ist

$$|f(z)| \le |z| = |f^{-1}(w)| \le |w| = |f(z)|,$$

also $|f(z)| = |z|$ bzw. $|\frac{f(z)}{z}| = 1$ $\forall z \in B_1(0) \setminus \{0\}$. Wegen des Offenheitsatzes ist das nur möglich, wenn $\frac{f(z)}{z}$ konstant ist mit einem Wert λ vom $|\lambda| = 1$:

D.h. $f(z) = \lambda z$. $\square$

Um hieraus alle Automorphismen des Einheitskreises (ohne die zusätzliche Bedingung $f(0) = 0$) zu bestimmen, werden wir uns eines einfachen gruppentheoretischen Lemmas bedienen, dessen Formulierung wiederum etwas Vokabular erfordert.

<u>Def.</u>: Es seien H eine Gruppe und M eine Menge. Man sagt, H operiere auf M, wenn es eine Abb.

$$H \times M \to M, \quad (g, x) \mapsto g \cdot x$$

gibt mit den folgenden Eigenschaften:

(a) $(g_1 g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x)$ $\forall g_1, g_2 \in H, x \in M$

(b) $e \cdot x = x$ $\forall x \in M$, wobei e das neutrale Element von H ist.

Bsp.: (1) Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Dann operiert $\mathrm{Aut}(G)$ auf G durch $f.z := f(z)$.

(2) Nach Lemma 1 (1) operiert $SL_2(\mathbb{R})$ auf $\mathbb{H}$ via Möbiustransformationen, d.h. durch $A.z := f_A(z)$.

Def.: Die Gruppe H operiere auf einer Menge M.

(a) Für $x \in M$ heißt $H_x := \{g \in H : g.x = x\}$ die <u>Isotropiegruppe</u> <u>von x</u> in H.

(b) H <u>operiert transitiv auf M</u>, wenn es zu je zwei Elementen $x, y \in M$ ein $g \in H$ gibt, so dass $g.x = y$.

Bem.: (1) Mit der Bez. in (a) lautet Satz 2: Die Isotropiegruppe $\mathrm{Aut}_0(B_1(0))$ besteht aus den Drehungen $z \mapsto \lambda z$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$ und $|\lambda| = 1$.

(2) H_x ist eine Untergruppe von H.

(3) Gibt es ein beliebiges $x_0 \in M$, so dass zu jedem $x \in M$ ein $g \in H$ existiert mit $g.x = x_0$, so operiert H bereits transitiv auf M.

(Denn: Zu $x, y \in M$ gibt es $g_1, g_2 \in H$ mit $g_1.x = g_2.y = x_0$.
Dann ist $(g_2^{-1} g_1).x = g_2^{-1}.(g_1.x) = g_2^{-1}.x_0 = y$.)

13.07.21

Lemma 2: Die Gruppe H operiere auf der Menge M. $J \subset H$ sei eine Untergruppe mit den folgenden Eigenschaften:

(1) J operiert transitiv auf M.

(2) J enthält eine Isotropiegruppe H_{x_0}.

Dann ist bereits $J = H$.

Bew.: Sei $h \in H$. Wegen (1) existiert zu jedem $x \in M$ ein $g \in J$ mit $g.(h.x) = x$. Wir wählen $g \in J$ mit $(gh).x_0 = g.(h.x_0) = x_0$. Dann ist $f := gh \in H_{x_0} \subset J$. Daraus folgt $h = g^{-1}f \in J$. $\square$

Satz 3: Es seien $J_0 := \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar\beta & \bar\alpha \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C}) : |\alpha|^2 > |\beta|^2 \right\}$ und $J := \{ f_A|_{B_1(0)} : A \in J_0 \}$. Dann ist $\mathrm{Aut}(B_1(0)) = J$.

Bew.:
- Nach Lemma 1 ist J eine Untergruppe von $\mathrm{Aut}(B_1(0))$.
- Sei $\lambda = e^{i\varphi}$ mit $-\pi < \varphi \leq \pi$ und $\mu = e^{i\varphi/2}$. Dann ist für alle $z \in \mathbb{C}$: $\lambda z = \mu^2 z = \dfrac{\mu z + 0}{0z + \bar\mu}$. Also enthält J alle Drehungen und nach Satz 2 ist $\mathrm{Aut}_0(B_1(0)) \subset J$.
- J operiert transitiv auf $B_1(0)$: Zu $x_0 = 0$ und $z \in B_1(0)$ wählen wir $\alpha = 1$ und $\beta = -\bar z$. Dann ist

für $A = \begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \bar\beta & \bar\alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -z \\ -\bar z & 1\end{pmatrix}$ $\quad f_A(z) = \dfrac{z-z}{-\bar z+1} = 0 = x_0$.

Jetzt Bem. (3).

Die Voraussetzungen von Lemma 2 sind erfüllt, es folgt $J = \mathrm{Aut}(B_1(0))$. $\square$

Lemma 3: Es ist

$$\mathrm{Aut}_i(\mathbb{H}) = \left\{ f_O : O = \begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix} \text{ für ein } \varphi \in \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right] \right\}$$

$$\subset \{ f_A : A \in SL_2(\mathbb{R}) \}.$$

Bew.: Es seien $g \in \mathrm{Aut}_i(\mathbb{H})$,

$f_i : \mathbb{H} \to B_1(0)$, $z \mapsto f_i(z) := \dfrac{z-i}{z+i}$ die Cayley-Abbildung,

$f_i^{-1} : B_1(0) \to \mathbb{H}$, $w \mapsto f_i^{-1}(w) = i\,\dfrac{1+w}{1-w}$ ihre Inverse

und $h := f_i \circ g \circ f_i^{-1}$.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{H} \arrow[r, "g"] & \mathbb{H} \arrow[d, "f_i"] \\ B_1(0) \arrow[u, "f_i^{-1}"] \arrow[r, "h"'] & B_1(0) \end{tikzcd}$$

Dann ist $h \in \mathrm{Aut}(B_1(0))$

und

$h(0) = f_i(g(f_i^{-1}(0)))$

$= f_i(g(i)) = f_i(i) = 0$.

Also $h \in \mathrm{Aut}_0(B_1(0))$. Nach Satz 2 existiert ein $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, so dass $h(z) = e^{2i\varphi} \cdot z \quad \forall\, z \in B_1(0)$.

Damit erhalten wir für $g = f_i^{-1} \circ h \circ f_i$ und $z \in \mathbb{H}$:

$$g(z) = f_i^{-1}(h(f_i(z))) = f_i^{-1}\left(e^{2i\varphi}\cdot\frac{z-i}{z+i}\right)$$

$$= -i\,\frac{e^{2i\varphi}\frac{z-i}{z+i}+1}{e^{2i\varphi}\frac{z-i}{z+i}-1} = -i\,\frac{e^{i\varphi}(z-i)+e^{-i\varphi}(z+i)}{e^{i\varphi}(z-i)-e^{-i\varphi}(z+i)}$$

$$= -i\,\frac{2z\cos\varphi - i(2i\sin\varphi)}{2iz\sin\varphi - i\cos\varphi} = \frac{z\cos\varphi+\sin\varphi}{-z\sin\varphi+\cos\varphi}.$$

(Setzt man $z=i$ ein, erhält man tatsächlich $g(i)=i$.)

Satz 4: $\mathrm{Aut}(\mathbb{H}) = \{f_A : A\in SL_2(\mathbb{R})\}$.

Bew.: Sei $J := \{f_A : A\in SL_2(\mathbb{R})\}$. Nach Lemma 1 (1) ist J eine Untergruppe von $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$.

Zu $z = x+iy \in \mathbb{H}$ können wir $f_A(w) = \dfrac{w-x}{0+y}$ bzw

$A = \begin{pmatrix}1 & -x\\ 0 & y\end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$ wählen, so dass $f_A(z)=i$.

Das bedeutet: J operiert transitiv auf $\mathbb{H}$.

Nach Lemma 3 ist $\mathrm{Aut}_i(\mathbb{H}) \subset J$.

Jetzt liefert Lemma 2 die Behauptung. $\square$