17. Die Sätze von Arzelà-Ascoli und Montel

Sei (K,d) ein kompakter metrischer Raum und $C(K) = (C(K), \| \ \|_K)$ der Vektorraum aller stetigen Funktionen $f: K \to \mathbb{K}$, ausgestattet mit der Supremumsnorm.

In Analysis II haben wir gesehen, dass $C(K)$ vollständig, also ein Banachraum ist.

$C(K)$ ist in aller Regel nicht kompakt, denn beschränkte Folgen in $(C(K), \| \ \|_K)$ haben nicht immer einen Häufungswert.

<u>Bsp.</u>: $K = [0, 2\pi]$, $f_n(x) = e^{inx}$. Dann sind alle $f_n \in C(K)$, und es gilt $\|f_n\|_K = \sup_{x \in [0,2\pi]} |e^{inx}| = 1$,

aber für $n \neq m$ ist

$$\|f_n - f_m\|_K = \sup_{x\in[0,2\pi]} |e^{inx} - e^{imx}| = \sup_{x \in [0,2\pi]} |e^{i(n-m)x} - 1| = 2$$

Es gibt also keine Teilfolge von (f_n), die bezüglich $\| \ \|_K$ eine Cauchy-Folge ist.

In vielen Fällen möchte man über konvergente Teilfolgen verfügen – z.B. zur "Konstruktion" von Lösungen gewöhnlicher Dgln. zu gegebenen Anfangswerten (→ Existenzsatz v. Peano).

Von Interesse ist daher eine zusätzliche Eigenschaft von Folgen in $C(K)$, die die Existenz konvergenter Teilfolgen nach sich zieht.

Def.: Sei (K,d) ein kompakter metrischer Raum. Eine Folge $(f_n)_n$ in $C(K)$ heißt <u>gleichgradig stetig</u>, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}, x, y \in K: d(x,y) < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon.$$

Satz 1 (Arzelà-Ascoli): Sei (K,d) ein kompakter metrischer Raum und $(f_n)_n$ eine Folge in $C(K)$, die

(1) gleichgradig stetig und

(2) bezüglich $\| \ \|_K$ beschränkt ist.

Dann besitzt $(f_n)_n$ eine gleichmäßig konvergente Teilfolge.

Bew.: (1) Für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$K = \bigcup_{\xi \in K} B_{\frac{1}{m}}(\xi) = \bigcup_{\xi \in K_m} B_{\frac{1}{m}}(\xi)$$

mit einer <u>endlichen</u> Menge K_m, letzteres, weil K kompakt ist. Die Menge $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} K_m$ ist höchstens abzählbar, es gibt also eine Folge $(\xi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ in K, so dass $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} K_m = \{\xi_j : j \in \mathbb{N}\}$.

(2) Nun sei (f_n) eine gleichgradig stetige und beschränkte Folge in $C(K)$. Dann ist

$(f_n(\xi_1))_n$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{K}$. Diese besitzt nach Bolzano-Weierstraß eine konvergente TF

$(f_{n_k^1}(\xi_1))_{k\in\mathbb{N}}$. Weiter ist

$(f_{n_k^1}(\xi_2))_{k\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{K}$ mit

konvergenter Teilfolge $(f_{n_k^2}(\xi_2))_{k\in\mathbb{N}}$.

Fährt man in dieser Weise fort, erhält man eine Folge von Teilfolgen $(f_{n_k^j})_{k\in\mathbb{N}}$ mit folgenden Eigenschaften:

$(f_{n_k^j}(\xi_j))_{k\in\mathbb{N}}$ ist konvergent;

$(f_{n_k^j})_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Teilfolge von $(f_{n_k^{j-1}})_{k\in\mathbb{N}}$.

Nun definiert man die Diagonalfolge

$f_{n_k} := f_{n_k^k}$. Hierfür gilt

$(f_{n_k})_{k\geq j}$ ist eine Teilfolge von $(f_{n_k^j})_{k\in\mathbb{N}}$

und daher $(f_{n_k}(\xi_j))_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent.

(3) Nun soll gezeigt werden: $(f_{n_k})_k$ ist bezüglich $\| \ \|_K$ eine Cauchy-Folge. Dazu sei $\varepsilon>0$ vorgegeben. Dann existiert wegen der gleich-

gradigen Stetigkeit der Folge (f_n) ein $\delta > 0$, so dass

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x, y \in K \text{ mit } d(x,y) < \delta : \ |f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Wir wählen $m > \frac{1}{\delta}$. Dann erhalten wir für ein beliebiges $x \in K$:

- Es existiert ein ξ_j, so dass $x \in B_{\frac{1}{m}}(\xi_j)$ und daher $|f_n(x) - f_n(\xi_j)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall n \in \mathbb{N}$;
- weil $(f_{n_k}(\xi_j))_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert, gibt ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $k, l > N$ gilt

$$|f_{n_k}(\xi_j) - f_{n_l}(\xi_j)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Dieses N hängt <u>nicht</u> von x ab, sondern nur von den endlich vielen $\xi_j \in K_m$ (und damit via δ von ε)!

Dann gilt also $\forall x \in K,\ k, l > N$

$$|f_{n_l}(x) - f_{n_k}(x)| \le |f_{n_l}(x) - f_{n_l}(\xi_j)| + |f_{n_l}(\xi_j) - f_{n_k}(\xi_j)| + |f_{n_k}(x) - f_{n_k}(\xi_j)| < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Das heißt, wir haben $\forall k, l > N = N(\varepsilon)$:

$$\|f_{n_l} - f_{n_k}\|_K = \sup_{x \in K} |f_{n_l}(x) - f_{n_k}(x)| < \varepsilon.$$

$\Rightarrow (f_{n_k})_k$ ist in $(C(K), \|\ \|_K)$ Cauchy und also konvergiert. $\square$

Def.: Eine Folge $(f_n)_n$ von Funktionen $f_n: \Omega \to \mathbb{C}$ heißt beschränkt auf $A \subset \Omega$, wenn ein $C > 0$ existiert, so dass $\|f_n\|_A \leq C$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

$(f_n)_n$ heißt <u>lokal beschränkt</u>, wenn es zu jedem $z \in \Omega$ eine Umgebung $U(z) \subset \Omega$, so dass (f_n) auf $U(z)$ beschränkt ist.

<u>Bem.</u>: Ist $(f_n)_n$ lokal beschränkt und $K \subset \Omega$ kompakt, so ist $(f_n)_n$ auf K beschränkt.

<u>Lemma</u> 1: Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $(f_n)_n$ eine lokal beschränkte Folge holomorpher Funktionen $f_n: \Omega \to \mathbb{C}$. Dann gilt:

Ist $K \subset \Omega$ kompakt, so ist $(f_n)_n$ auf K gleichgradig stetig.

<u>Bew.</u>: Da $K \subset \Omega$ kompakt ist, ist

$$\delta := \frac{1}{3} \operatorname{dist}(K, \partial\Omega) > 0.$$

Wir definieren

$$K' := \{z \in \Omega : \operatorname{dist}(z, K) \leq \delta\} \quad \text{und}$$

$$K'' := \{z \in \Omega : \operatorname{dist}(z, K') \leq \delta\}.$$

Dann sind $K', K'' \subset \Omega$ kompakt und für jedes $z \in K$ ist $\overline{B_\varrho(z)} \subset K'$,

" " $z \in K'$ " $\overline{B_\varrho(z)} \subset K''$.

Da $(f_n)_n$ lokal beschränkt ist, existiert

$$C := \sup\{|f_n(z)| ; z \in K'', n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}.$$

Dann ist für $z \in K'$ aufgrund der Cauchyschen Ungleichungen:

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad |f_n'(z)| \leq \frac{1}{\varrho} \max_{|\zeta - z| = \varrho} |f_n(\zeta)| \leq \frac{C}{\varrho}.$$

Für $x, y \in K$ mit $|x-y| \leq \varrho$ ist dann die Verbindungsstrecke $[x,y] \subset K'$ und daher auch, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$|f_n(x) - f_n(y)| = \Big|\int_{[x,y]} f_n'(z)\, dz\Big| \leq |x-y| \cdot \frac{C}{\varrho}.$$

Wird nun $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so wählen wir $\delta < \min(\varrho, \frac{\varrho}{C} \cdot \varepsilon)$. Dann ist $\forall n \in \mathbb{N}$ und $\forall x, y \in K$ mit $|x-y| < \delta$

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \delta \cdot \frac{C}{\varrho} < \varepsilon.$$

Damit ist die gleichgradige Stetigkeit gezeigt.

Satz 2 (Montel): Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Jede in Ω lokal beschränkte Folge $(f_n)_n$ holomorpher Funktionen besitzt eine Teilfolge, die in Ω kompakt konvergiert.

Bem.: Nach dem Konvergenzsatz von Weierstraß ist die Grenzfunktion ebenfalls holomorph.

Bew. des Satzes: Sei $(K_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Ausschöpfung von Ω mit Kompakta, d.h. $K_j \subset K_{j+1}$ $\forall j \in \mathbb{N}$ und $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} K_j = \Omega$. Dann ist für jedes $j \in \mathbb{N}$ die Folge $(f_n|_{K_j})_{n\in\mathbb{N}}$ gleichgradig stetig und in der Norm $\| \ \|_{K_j}$ beschränkt (Lemma 1 und die Bemerkung davor), dasselbe gilt auch für Teilfolgen. Der Satz von Arzelà-Ascoli ergibt die Existenz

- einer auf K_1 glm. konvergenten Teilfolge $(f_{n_k^1}|_{K_1})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(f_n|_{K_1})_{n\in\mathbb{N}}$, ...
- einer auf K_{j+1} glm. konvergenten Teilfolge $(f_{n_k^{j+1}}|_{K_{j+1}})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(f_{n_k^j}|_{K_{j+1}})_{k\in\mathbb{N}}$ ... usw.

Die Diagonalfolge $(f_{n_k})_k = (f_{n_k^k})_k$ ist dann auf ganz Ω kompakt konvergent. $\square$

Satz 3 (Vitali): Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $(f_n)_n$ eine lokal beschränkte Folge holomorpher Funktionen $f_n : G \to \mathbb{C}$. Die Menge

$$M := \{ z \in G : \lim_{n \to \infty} f(z) \text{ existiert} \}$$

besitze in G einen Häufungspunkt. Dann konvergiert $(f_n)_n$ kompakt.

Bew.: Nach Montel besitzt $(f_n)_n$ eine kompakt konvergente Teilfolge $(f_{n_k})_k$, deren holomorphe Grenzfunktion sei $f : G \to \mathbb{C}$.

Nehmen wir an, dass $(f_n)_n$ nicht kompakt gegen f konvergiert, so folgt

$\exists\, K \subset G$ kompakt, $\varepsilon_0 > 0$ $\forall m \in \mathbb{N}$ $\exists\, m_\ell \geq m$, so dass

$$\sup_{z \in K} |f_{m_\ell}(z) - f(z)| \geq \varepsilon_0 . \qquad (*)$$

Die sich hieraus ergebende Teilfolge $(f_{m_\ell})_\ell$ ist wiederum eine lokal beschränkte Folge holomorpher Funktionen, die nach Montel eine kompakt konvergente Teilfolge besitzt. Diese sei wiederum mit $(f_{m_\ell})_\ell$ bezeichnet, die (holomorphe) Grenzfunktion der f_{m_ℓ} sei $g : G \to \mathbb{C}$. Dann stimmen f und g auf M überein. Da

M nach Voraussetzung einen Häufungspunkt in G besitzt und da G ein Gebiet ist, ergibt der Identitätssatz, dass $f = g$ (auf ganz G). Das steht im Widerspruch zu $(*)$. $\square$

Schließlich werden wir für den Riemannschen Abbildungssatz im nächsten Abschnitt das folgende Ergebnis benötigen:

<u>Satz</u> 4 (Injektionssatz von Hurwitz): Es sei $(f_n)_n$ eine Folge injektiver holomorpher Funktionen auf einem Gebiet G. Wenn $(f_n)_n$ kompakt konvergiert, dann ist die Grenzfunktion entweder konstant oder injektiv.

<u>Bew.</u>: Nehmen wir an, die Grenzfunktion $f: G \to \mathbb{C}$ sei nicht injektiv, so existieren $w \in \mathbb{C}$ und $z_1, z_2 \in G$ mit $f(z_1) = f(z_2) = w$. Nehmen wir weiter an, f sei nicht konstant, so sind diese w-Stellen isoliert, d.h. es existieren $r_1, r_2, \varepsilon > 0$, so dass

$$\overline{B_{r_1}(z_1)} \cap \overline{B_{r_2}(z_2)} = \emptyset \quad \text{und} \quad |f(z) - w| \geq \varepsilon,$$

falls $|z - z_j| = r_j$ $(j \in \{1,2\})$.

Da $(f_n)_n$ kompakt gegen f konvergiert, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\forall n \geq n_0$ sowohl auf $\partial B_{r_1}(z_1)$ als auch auf $\partial B_{r_2}(z_2)$ gilt

$$|f_n(z) - w - (f(z) - w)| = |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \; (\leq |f(z) - w|)$$

mit demselben ε wie oben. Damit erfüllen die Funktionen $f(z) - w$ und $f_n(z) - w$ die Voraussetzungen des Satzes von Rouché, wonach sowohl in $B_{r_1}(z_1)$ wie auch in $B_{r_2}(z_2)$ $f_n(z) - w$ ebensoviele Nullstellen besitzt wie $f(z) - w$.
f_n hat also zwei w-Stellen, ein Widerspruch zur Injektivitätsvoraussetzung. $\square$