18. Der Riemannsche Abbildungssatz

Zum Abschluss der Vorlesung möchte ich in diesem Abschnitt den folgenden Satz beweisen:

Riemannscher Abbildungssatz (Riemann 1851, Osgood 1900): Jedes einfach zusammenhängende Gebiet $G \subsetneq \mathbb{C}$ kann biholomorph auf die Einheitskreisscheibe $B_1(0)$ abgebildet werden.

Bem.: Eine holomorphe Abbildung $f: \mathbb{C} \to B_1(0)$ ist aufgrund des Satzes von Liouville konstant. Daher kann es keine biholomorphe Abbildung von $\mathbb{C}$ auf $B_1(0)$ geben.

Wir benötigen erst einigen Begriffen:

Def.: Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet.

(1) Eine holomorphe Funktion $f: G \to \mathbb{C}$ wird als Einheit bezeichnet, wenn sie keine Nullstellen besitzt.

(2) Man sagt, G habe die Quadratwurzeleigenschaft, wenn jede Einheit $f: G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Quadratwurzel besitzt, das heißt, wenn

- es eine holomorphe Funktion $g: G \to \mathbb{C}$ mit $g^2 = f$ gibt, bzw. wenn
- es eine auf Bild(f) holomorphe Logarithmusfunktion L gibt. In diesem Fall ist nämlich $g(z) = \exp(\frac{1}{2} L(f(z)))$ eine Quadratwurzel.

(3) Ein Gebiet G mit Quadratwurzeleigenschaft und $0 \in G$ heißt ein <u>Q-Gebiet</u>.

<u>Bsp.</u> (zu (2)): Sei $0 \leq r < R \leq \infty$. Dann hat $K_{r,R}(0)$ <u>nicht</u> die Quadratwurzeleigenschaft. Denn $f(z) = z$ ist auf $K_{r,R}(0)$ eine Einheit, aber auf $K_{r,R}(0)$ existiert keine holomorphe (oder auch nur stetige) Logarithmusfunktion.

<u>Bem.</u> (zu (2)): Ist $\varphi: G \to H$ biholomorph und hat G die Quadratwurzeleigenschaft, so auch H.

<u>Denn</u>: Sei $f: H \to \mathbb{C}$ eine Einheit. Dann ist $f \circ \varphi: G \to \mathbb{C}$ eine Einheit auf G und besitzt also eine Quadratwurzel, $g: G \to \mathbb{C}$. Dann ist $g \circ \varphi^{-1}: H \to \mathbb{C}$ eine Quadratwurzel von f.

Lemma 1: Jedes einfach zusammenhängende Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ hat die Quadratwurzeleigenschaft.

Bew.: Sei $f: G \to \mathbb{C}$ eine Einheit. Dann ist $\frac{f'}{f}: G \to \mathbb{C}$ holomorph und besitzt auf G eine Stammfunktion F. Hierfür ergibt die Ketten- bzw. Quotientenregel:

$$\left(\frac{\exp\circ F}{f}\right)' = \frac{1}{f^2}\left(\exp\circ F \cdot \frac{f'}{f}\cdot f - \exp\circ F\cdot f'\right) = 0$$

$\Rightarrow \exp\circ F = c\cdot f$ mit einem $c \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Ist jetzt $b^2 = c$, so ist $z \mapsto \frac{1}{b}\cdot\exp\left(\frac{1}{2}F(z)\right)$ eine Quadratwurzel von f, denn

$$\left(\frac{1}{b}\exp\left(\frac{1}{2}F(z)\right)\right)^2 = \frac{1}{b^2}\cdot\exp(F(z)) = \frac{1}{c}\cdot c\cdot f = f. \quad \square$$

Satz 1: Zu jedem Q-Gebiet $G \subsetneqq \mathbb{C}$ gibt es eine injektive holomorphe Abbildung $f: G \to B_1(0)$ mit $f(0) = 0$.

Bew.: Sei $a \in \mathbb{C}\setminus G$. Dann ist $h(z) = z - a$ eine Einheit auf G. Also gibt es ein $g \in \mathcal{O}(G)$ mit

$$g(z)^2 = z - a \quad \forall z \in G.$$

g ist injektiv, denn $g(z_1) = g(z_2) \Rightarrow z_1 - a = z_2 - a$.

Wir behaupten, dass $g(G)\cap(-g)(G)=\emptyset$. (!)

$\ulcorner$ Sei $g(z_1)=-g(z_2)$ für $z_{1,2}\in G$. Dann ist

$$z_1-a=g(z_1)^2=g(z_2)^2=z_2-a,$$

also $z_1=z_2$ und $g(z_1)=0$, also $z_1=a\notin G$ $\lightning$ $\Rightarrow$ (!) $\lrcorner$

g ist holomorph und nicht konstant. Daher ist nach dem Offenheitssatz $-g(G)$ offen. Es gibt also ein $w\in -g(G)$ und ein $\varepsilon>0$, sodass $B_\varepsilon(w)\subset -g(G)$ bzw. $B_\varepsilon(w)\cap g(G)=\emptyset$. Wegen der Offenheit von $g(G)$ gilt sogar

$$g(G)\subset \mathbb{C}\setminus\overline{B_\varepsilon(w)}.$$

Jetzt definiert man

$$f(z):=\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{1}{g(z)-w}-\frac{1}{g(0)-w}\right).$$

Dann ist f injektiv (weil g injektiv ist) und aus $|g(z)-w|>\varepsilon$ für alle $z\in G$ folgt

$$|f(z)|=\frac{\varepsilon}{2}\left|\frac{1}{g(z)-w}-\frac{1}{g(0)-w}\right|<\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon}\right)=1$$

$\square$

Offenbar gilt auch $f(0)=0$.

Def.: Ist $G \subset B_1(0)$ ein Gebiet mit $0 \in G$, so bezeichnet man eine injektive holomorphe Abbildung $\psi : G \to B_1(0)$ mit $\psi(0) = 0$ und $|\psi(z)| > |z|$ $\forall z \in G \setminus \{0\}$ als eine <u>Dehnung</u> von G.

Wir konstruieren Dehnungen als Inverse von Kontraktionen. Dazu starten wir mit zwei

Bem.: (1) Für $c \in B_1(0)$ ist die Abbildung

$$g_c : z \mapsto g_c(z) := \frac{z-c}{\bar{c}z-1} = \frac{iz-ic}{i\bar{c}z-i} \quad \text{mit}$$

zugehöriger Matrix $\begin{pmatrix} i & -ic \\ i\bar{c} & -i \end{pmatrix}$ vom Typ $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$

ein Automorphismus von $B_1(0)$. Aus

$$\begin{pmatrix} i & -ic \\ i\bar{c} & -i \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} |c|^2-1 & 0 \\ 0 & |c|^2-1 \end{pmatrix}$$

folgt, dass $g_c \circ g_c = \mathrm{Id}_{B_1(0)}$. Ferner ist $g_c(0) = c$ und $g_c(c) = 0$.

(2) Nun seien $j : B_1(0) \to B_1(0)$, $z \mapsto j(z) := z^2$ und

$$d_c : B_1(0) \to B_1(0), \; z \mapsto d_c(z) := g_{c^2}(j(g_c(z))).$$

Dann ist $d_c(0) = g_{c^2}(c^2) = 0$ und das Lemma von Schwarz zeigt: $\forall z \in B_1(0) \setminus \{0\} : |d_c(z)| \leq |z|$.

Nehmen wir für ein $z_0 \in B_1(0) \setminus \{0\}$ an, dass

$$|d_c(z_0)| = |z_0|,$$

so hat die holomorphe Funktion $z \mapsto \frac{d_c(z)}{z}$ in z_0 ein Betragsmaximum und ist nach dem Maximumprinzip konstant: $\frac{d_c(z)}{z} = \lambda$ mit $|\lambda| = 1$, also d_c eine Drehung. Das ist unmöglich, weil j nicht injektiv ist.

<u>Lemma</u> 2 (Koebe): Sei $G \subset B_1(0)$ ein Q-Gebiet, $c \in B_1(0)$ mit $c^2 \notin G$ und g die holomorphe Quadratwurzel aus $\underset{G \to B_1(0)}{g_{c^2}}$ mit $g(0) = c$. Dann gilt für $\psi_c := g_c \circ g$, dass $d_c \circ \psi_c = \mathrm{Id}_G$. Insbesondere ist ψ_c eine Dehnung (von

<u>Bew.</u>: $d_c(\psi_c(z)) = g_{c^2}(j(\underbrace{g_c(g_c}_{= \mathrm{Id}_{B_1(0)}}(g(z)))))$

$$= g_{c^2}(j(g(z))) = g_{c^2}(g_{c^2}(z)) = z \quad (z \in G).$$

Die Dehnungseigenschaft folgt aus

$$|z| = |d_c(\psi_c(z))| \underset{\text{Lemma}(2)}{<} |\psi_c(z)|. \qquad \square$$

Satz 2: Sei $G \subsetneq \mathbb{C}$ ein Q-Gebiet. Dann existiert eine biholomorphe Abbildung von G auf $B_1(0)$.

Bem.: Ist $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $0 \notin G$, das die Quadratwurzeleigenschaft hat, so lässt sich G durch Verschiebung in ein Q-Gebiet transformieren. Satz 2 gilt also auch ohne die Voraussetzung $0 \in G$ und damit für alle einfach zusammenhängenden Gebiete G.

Bew.: Es sei $p \in G \setminus \{0\}$ beliebig und

$$b := \sup \left\{ |f(p)| : \begin{matrix} f: G \to B_1(0) \text{ ist injektiv und} \\ \text{holomorph mit } f(0) = 0 \end{matrix} \right\}$$

Nach Satz 1 ist die Menge, über die das Supremum gebildet wird, nicht leer. Daher gilt $b > 0$ und es gibt eine Folge injektiver holomorpher Funktionen $f_n : G \to B_1(0)$ mit $f_n(0) = 0$ und $\lim_{n\to\infty} |f_n(p)| = b$.

Der Satz von Montel ergibt: Es existiert eine kompakt konvergente Teilfolge (f_{n_k}) mit holomorpher Grenzfunktion $f: G \to B_1(0)$.

Aus der punktweisen Konvergenz folgt $f(G) \subset \overline{B_1(0)}$, $f(0) = 0$ und $b = |f(p)| > 0$.

Also ist f nicht konstant und daher gebietstreu, so dass $f(G) \subset B_1(0)$. Aus dem Hurwitzschen Injektionssatz folgt, dass f injektiv ist.

Nehmen wir an, f sei nicht surjektiv. Dann existiert ein $c^2 \in B_1(0) \setminus f(G)$. Da mit G auch $f(G)$ ein Q-Gebiet ist (denn: $f: G \to f(G)$ ist biholomorph und $f(0)=0$), können wir das Dehnungslemma anwenden und erhalten eine Abbildung

$$\psi_c : f(G) \to B_1(0) \text{ mit } |\psi_c(z)| > |z| \quad \forall\, z \in f(G).$$

Nun ist $\psi_c \circ f : G \to B_1(0)$ eine injektive holomorphe Abbildung mit $\psi_c \circ f(0) = 0$ und $|\psi_c \circ f(p)| > |f(p)| = b$, ein Widerspruch zur Definition von b. $\square$

Eindeutigkeitssatz: Sind h_1 und h_2 biholomorphe Abbildungen eines Gebietes G auf den Einheitskreis $B_1(0)$ und gibt es ein $z_0 \in G$ für das $h_1(z_0) = h_2(z_0)$ sowie $\frac{h_1'(z_0)}{h_2'(z_0)} > 0$ gelten. Dann ist $h_1 = h_2$.

Bew.: Zunächst nehmen wir $h_1(z_0) = h_2(z_0) = 0$ an.
Dann ist $h_1 \circ h_2^{-1} \in \mathrm{Aut}_0(B_1(0))$. Es gibt also ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| = 1$, so dass $h_1(h_2^{-1}(z)) = \lambda z \quad \forall z \in B_1(0)$.

$$\rightsquigarrow \lambda = (h_1 \circ h_2^{-1})'(z) = h_1'(h_2^{-1}(z)) \cdot (h_2^{-1})'(z)$$

$$= \frac{h_1'(h_2^{-1}(z))}{h_2'(h_2^{-1}(z))} \underset{\text{n. Vor.}}{>} 0 \rightsquigarrow \lambda = 1 \rightsquigarrow h_1 = h_2.$$

Wenn $h_1(z_0) = h_2(z_0) = c \in B_1(0) \setminus \{0\}$, setzt man $\tilde{h}_i := g_c \circ h_i$, so dass $\tilde{h}_i(z_0) = g_c(c) = 0$. Dann ergibt der erste Teil $\tilde{h}_1 = \tilde{h}_2$ und daraus folgt $h_1 = h_2$. $\square$