Historischer Einstieg: Die komplexen Zahlen bilden die Grundlage der Funktionentheorie. Wer hat sie wann entdeckt? Und in Zusammenhang mit welchen mathematischen Fragestellungen treten sie zuerst auf?

Die naheliegenden Verdächtigen sind Gauss (1777-1855, "Gauss'sche Zahlenebene", "Gauss'sche ganze Zahlen") und Euler (1707-1783, Euler Formel: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$).

Gauss - kennt die Interpretation komplexer Zahlen als Punkte in der Ebene seit 1796 (19-jährig!) und
- benutzt diese 1799 in seiner Dissertation zum Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra.

Er etabliert die komplexen Zahlen (Gauss führt diese Bezeichnung in einer Veröffentlichung 1831 erst ein, zuvor war stets von "imaginären Zahlen" die Rede) als ernstzunehmende Objekte mathematischer Untersuchungen.

Euler hat bereits früher (wie immer virtuos) mit komplexen Zahlen gerechnet. Neben der Eulerschen Formel war ihm bekannt, dass

$$\ln(i) = \frac{i\pi}{2} \quad \text{bzw.} \quad i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$$

Was ist der ln bzw. die Potenz im Komplexen?

und ebenso, dass

$$\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-4} = \sqrt{4} = 2, \quad \text{weil ja } \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}.$$

Was man natürlich bezweifeln kann, wodurch man zu der Frage gelangt, wie eine auf $\Omega \subset \mathbb{C}$ definierte Wurzel-<u>funktion</u> beschaffen sein müsste.

Euler betrachtet die "imaginären Zahlen" jedoch noch sehr mißtrauisch. In seinem Lehrbuch "Vollständige Anleitung zur Algebra" (1768 auf russisch, 1770 auf deutsch erschienen) heißt es:

> "... so ist klar, daß die Quadratwurzeln von Negativ-Zahlen nicht einmahl unter die möglichen Zahlen können gerechnet werden: folglich müssen wir sagen, daß dieselben ohnmögliche Zahlen sind. Und dieser Umstand leitet uns auf den Begriff von solchen Zahlen, welche (...) gewöhnlich imaginäre Zahlen, oder eingebildete Zahlen genennt werden, weil sie bloss allein in der Einbildung statt finden."

(Aus Capitel 13, Abschnitt 143 des genannten Lehrbuchs. Zitiert nach: Reinhold Remmert, "Komplexe Zahlen", in: Ebbinghaus (Hrsg.): "Zahlen", Springer 1992 (3). Fast alle Informationen hier sind dem Aufsatz von Remmert entnommen.)

Vor Euler waren die imaginären Wurzeln bereits Leibniz geläufig. In einem Artikel von 1702 bezeichnet er sie als eine

"... feine und wunderbare Zuflucht des göttlichen Geistes, beinahe ein Zwitterwesen zwischen Sein und Nichtsein." (Ebda., S. 48)

1712 behauptet Leibniz, dass $\log(-1) \in i\mathbb{R}$.
Können Sie dem zustimmen?

Die Bezeichnung "imaginäre Zahlen" wurde geprägt von Descartes. In seinem Buch "La Géométrie" (Leyden, 1637) schreibt er sinngemäß:

"Man kann sich bei jeder Gleichung so viel Wurzeln einbilden ("imaginer"), wie der Grad angibt, nur entspricht diesen eingebildeten Wurzeln manchmal keine reelle Größe." (Ebda., S. 47)

Eine ziemlich skeptische Formulierung des Fundamentalsatzes der Algebra. Damit sind wir aber genau bei dem Problem angelangt, bei dem "imaginäre Zahlen" zuerst auftraten, nämlich bei der Lösung von Polynom-, insbes. kubischen Gln.

Um den Ursprung der "imaginären Zahlen" endlich auf die Spur zu kommen, müssen wir allerdings noch einmal fast 100 Jahre zurückgehen, ins Zeitalter der Renaissance in Italien: Am 10. August 1548 wird in Mailand ein erbitterter Prioritätsstreit ausgetragen zwischen Niccolo Tartaglia (1499 – 1557, der "Stotterer") und Gerolamo Cardano (1501 – 1576), der sich durch seinen Schüler Lodovico Ferrari vertreten lässt. Es geht um die Lösungsformel für die reduzierte kubische Gleichung

$$x^3 + px + q = 0, \qquad (rC)$$

die heute als Cardanische Formel bekannt ist:

$$x = u + v, \quad u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{D}, \quad v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{D},$$

wobei $D = (\frac{p}{3})^3 + (\frac{q}{2})^2$ die "Diskriminante" der Gleichung ist: Für $D > 0$ $(= 0, < 0)$ besitzt (rC) genau eine (zwei, drei) reelle Lösungen. Cardano hat die Formel 1539 von Tartaglia unter dem Eid der Verschwiegenheit erfahren und sie dennoch 1545 in seinem Werk

"Ars Magna sive de Regulis Algebraicis"

veröffentlicht, ohne Tartaglias Urheberschaft zu erwähnen. Ferrari verteidigt seinen Lehrer Cardano mit dem Hinweis, die Lösungsformel auch in der Hinterlassenschaft von Scipio dal Ferro (1465–1526) gefunden zu haben, der diese also bereits vor Tartaglia kannte. Letzterer könne Cardano nicht verbieten lassen, die Erkenntnisse eines Dritten zu verbreiten. Mit dieser "Argumentation" hat Ferrari Erfolg, und Tartaglia wird verurteilt, seine Anschuldigungen öffentlich zu widerrufen. Den Ruhm erntet Cardano, dessen einziger Beitrag zum mathematischen Problem es war, die allgemeine kubische Gleichung

$$y^3 + \underline{ay^2} + by + c = 0$$

mit der Substitution $x = y + \frac{a}{3}$ auf (rC) zurückzuführen.

Keiner der Beteiligten erkennt die reale Existenz von Wurzeln aus negativen Zahlen auch nur ansatzweise an. Cardano schreibt in Kap. 37 seiner "Ars Magna" zwar die Lösungen

$$x_{\pm} = 5 \pm \sqrt{-15} \qquad \text{der Gleichung} \qquad x(10-x) = 40$$

an, jedoch nur, um sie sogleich als "quantitas sophisticas" zu verwerfen. Ausdrücklich spricht er vom "Versagen" der Lösungsformel im Fall $D<0$, weil er mit $u=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{D}}$ dann nicht umzugehen weiß. Und Tartaglia zögert u.a. wegen dieses Problems die Veröffentlichung seiner Erkenntnisse jahrelang hinaus.

Es handelt sich hier tatsächlich um einen entscheidenden Punkt: Anders als bei den quadratischen Gleichungen können die imaginären Wurzeln nicht einfach als nicht-existent abgetan werden, führen sie doch bei Fortsetzung der Rechnung auf drei reelle Lösungen von (rC).

1572 erscheint schließlich in Bologna das Lehrbuch "L'Algebra" von Rafael Bombelli (1526-1572), in dem die imaginären Zahlen als reale Objekte mathematischer Betrachtungen etabliert werden. Die imaginäre Einheit erhält den Namen pdm 1 (più di meno),

$-i$ ist mdm 1 (meno di meno), und Bombelli gibt acht fundamentale Rechenregeln für komplexe Zahlen an, als achte darunter mal

mdm 1 per mdm 1 = m 1,

was sei zweifellos als korrekt erkennen werden. Mit diesem Kalkül wendet er Cardanos (oder Tartaglias oder dal Ferros) Lösungsformel beispielhaft an auf die Gleichung

$$x^3-15x-4=0 \quad \text{mit } p=-15,\ q=-4,\ D=\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2=-121$$

und gelangt zu

$$x=\left(2+\sqrt{-121}\right)^{1/3}+\left(2-\sqrt{-121}\right)^{1/3}=\sqrt[3]{2+11i}+\sqrt[3]{2-11i}.$$

Aus einer vorhergehenden Rechnung weiß er, dass

$$(2\pm i)^3=2\pm 11i$$

ist, und kommt sofort nach diesem "Durchgang durch das Komplexe" zu der reellen Lösung

$$x=2+i+2-i=4.$$

<u>Fazit von Remmert</u> (S. 47): "Bombelli hat, ohne sich große Gedanken über das Wesen komplexer Zahlen zu machen, (...) als erster das formal korrekte Rechnen mit komplexen Zahlen gelehrt."

Die "Cardano-Formel" für $x^3+px+q=0$ lässt sich mit dem Ansatz $x = u+v$ leicht herleiten. Man hat

$$0 = (u+v)^3 + p(u+v) + q = u^3+v^3+(3uv+p)(u+v)+q$$

$$\Leftarrow \quad u^3+v^3+q=0 \ \wedge \ 3uv+p=0$$

$$\Leftrightarrow \quad u^3+v^3+q=0 \ \wedge \ v = -\tfrac{p}{3}\cdot\tfrac{1}{u}$$

$$\Leftrightarrow \quad u^3+\left(-\tfrac{p}{3}\right)^3\cdot\tfrac{1}{u^3}+q=0 \ \wedge \ 3uv+p=0$$

$$\Leftrightarrow \quad (u^3)^2+qu^3-\left(\tfrac{p}{3}\right)^3=0 \ \wedge \ 3uv+p=0$$

$$\Leftrightarrow \quad u^3 \in \Big\{-\tfrac{q}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\left(\tfrac{q}{2}\right)^2+\left(\tfrac{p}{3}\right)^3}_{=: D}}\Big\} \ \wedge \ 3uv+p=0$$

$$\Leftrightarrow \quad u^3 = -\tfrac{q}{2}+\sqrt{D} \ \wedge \ v^3 = -\tfrac{q}{2}-\sqrt{D} \quad \text{(oder umgekehrt)}$$

↖ Symm. $u \leftrightarrow v$

Die Gleichung $t^2+qt-\left(\frac{p}{3}\right)^3=0$ für $t=u^3$ heißt die "quadratische Resolvente" von $x^3+px+q=0$.

Im Fall $D<0$ steht man ausschließend vor der in der Regel schwierigeren Aufgabe, eine dritte Wurzel aus der komplexen Zahl

$$w = -\frac{q}{2} + i\sqrt{|D|}$$

zu finden. Die beiden anderen 3. Wurzeln aus w erhält man dann durch Multiplikation mit den von 1 verschiedenen 3. Einheitswurzeln, das sind

$$\varepsilon_1 = e^{\frac{2\pi i}{3}} \quad \text{und} \quad \varepsilon_2 = e^{\frac{4\pi i}{3}}.$$

(In einer der Übungsaufgaben von Blatt 1 sollen Sie hierfür eine Darstellung $\varepsilon_j = a+ib$ finden.)

Die anderen beiden Lösungen der kubischen Gleichung erhält man mit

$$x_2 = \varepsilon_1 u + \varepsilon_2 v \quad \text{und} \quad x_3 = \varepsilon_2 u + \varepsilon_1 v,$$

wie man unter Beachtung von $\varepsilon_1^3 = \varepsilon_2^3 = \varepsilon_1\varepsilon_2 = 1$ leicht nachprüfen kann.

* * * * *

Allgemeiner: Die Bestimmung der n-ten Wurzeln aus einer gegebenen komplexen Zahl $w = u+iv$ wird durch die Kenntnis der n-ten Einheitswurzeln

$$\varepsilon_{k,n} = e^{i\frac{2\pi k}{n}}, \quad 0 \le k \le n-1$$

wesentlich erleichtert. Hat man nämlich

eine Lösung z_0 von $z_0^n = w$ gefunden, so ergeben sich alle weiteren zu

$$z_k = \varepsilon_{k,n}\, z_0 , \quad k \in \{1, \dots, n-1\},$$

denn es ist $z_k^n = \varepsilon_{k,n}^n\, z_0^n = 1 \cdot w = w.$

Die Aufgabe, solche Wurzeln in der Form $z = x+iy$ darzustellen (ohne auf $\cos(\frac{2\pi k}{n})$ und $\sin(\frac{2\pi k}{n})$ zurückzugreifen bzw. dabei stehenzubleiben), ist deutlich schwieriger, oft unlösbar, weil man erst

$$(x+iy)^n \overset{!}{=} w = u+iv$$

auf Polynomgleichungen n-ten Grades geführt wird. Auch für die Einheitswurzeln wird dies mindestens schwierig. Für $n=5$ gibt es eine elegante Lösung, die ich Ihnen zum Abschluss dieser Sitzung gern noch erläutern möchte!

Bestimmung der <u>5. Einheitswurzeln</u> in der Form $z = x+iy$: Zu lösen ist die Gleichung

$$0 = z^5 - 1 = (z-1) \cdot \sum_{k=0}^{4} z^k , \quad \left(\begin{array}{c}\text{geometrische} \\ \text{Summenformel}\end{array}\right)$$

also (nachdem $z_0 = 1$ als triviale Lösung erkannt ist):

$$0 = z^4+z^3+z^2+z+1 = z^2\left(z^2+z+1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}\right)$$

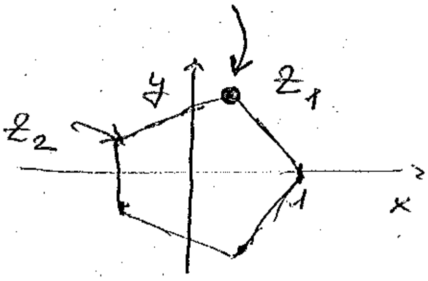
$$= z^2\left(z^2+2+\frac{1}{z^2}+z+\frac{1}{z}-1\right)$$

$$= z^2\left(\left(z+\frac{1}{z}\right)^2+\left(z+\frac{1}{z}\right)-1\right).$$

Nun ist $|z|=1$ gefordert, so dass $\frac{1}{z}=\bar{z}$ und daher $z+\frac{1}{z} = z+\bar{z} = 2\,\mathrm{Re}\, z = 2x =: w$. Da $z^2 \neq 0$, ist von w gefordert, die quadratische Gleichung

$$w^2+w-1=0$$

zu lösen, also $w = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$. Um eine Lösung z im positiven Quadranten zu erhalten, wählen wir das $+$-Zeichen, also



$$x = \frac{1}{4}\left(\sqrt{5}-1\right).$$

Pythagoras ergibt

$$y = \sqrt{1-x^2} = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$ und damit

$$z_1 = \frac{1}{4}\left(\sqrt{5}-1+i\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)$$

Die weiteren Einheitswurzeln ergeben sich als Potenzen von z_1, also

$$z_2 = z_1^2,\quad z_3 = z_1^3,\quad z_4 = z_1^4$$

und dann sind wir fertig, weil $z_1^5 = 1$ ist.