2. Tutorium zur FT, 27.04.21 ①

Reelle Funktionen $f: \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$ veranschaulichen wir uns üblicherweise anhand ihres Graphen

$$G_f = \{ (x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in I \}.$$

Für Abbildungen $f: \mathbb{C} \supset \Omega \to \mathbb{C}$ ist

$$G_f = \{ (z, f(z)) \in \mathbb{C}^2 : z \in \Omega \}$$

eine zweidimensionale Fläche in $\mathbb{C} \times \mathbb{C} = \mathbb{R}^4$, was wir uns nicht mehr vorstellen können. Lediglich die Graphen von $\mathrm{Re} f$, $\mathrm{Im} f$ und $|f|$ kann man zeichnen, vereinzelt finden sie in den Lehrbüchern solche Darstellungen - oft sind sie schon zu kompliziert, um ein charakteristisches Bild in Erinnerung zu behalten.

Um das Abbildungsverhalten komplexer Funktionen zu visualisieren ist es nützlich, die Bilder geometrisch einfacher Teilmengen von $\mathbb{C}$ - z.B. (Halb-) geraden, Kreise u.ä - rechnerisch zu bestimmen. Dadurch erhält man eine ungefähre Vorstellung, was eine Funktion $f: \mathbb{C} \supset \Omega \to \mathbb{C}$ „macht".

$\longrightarrow$ Blatt 2, Aufg. 9 für die e-Funktion

Hier soll das einfachste Beispiel jenseits der affin- ②
linearen Funktionen, d.h.

$$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto f(z) = z^2$$

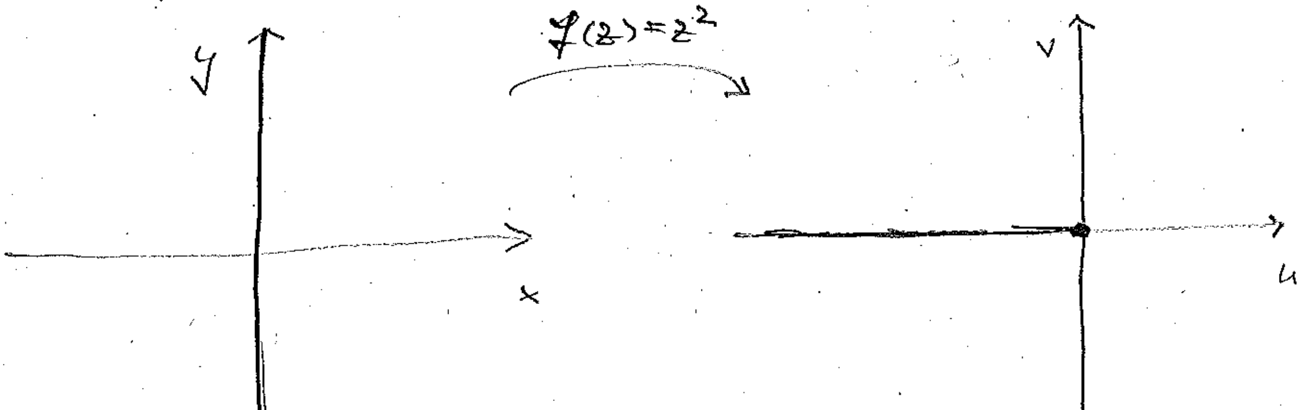
diskutiert werden. (f ist nicht injektiv, da $f(-z) = f(z)$. Schränkt man f auf eine Halbebene ein, die die 0 nicht enthält, erzwingt man die Injektivität.) Ggf. werfen wir auch einen Blick auf $f(z) = z^n$ mit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

1. Worauf bildet f Geraden ab?

Schauen wir uns zuerst vertikale Geraden an, gefragt ist also nach $f(G^a)$ für $f(z) = z^2$ und

$$G^a = \{a + iy \in \mathbb{C} : y \in \mathbb{R}\}$$

Trivialfall: $a = 0$: $f(G^0) = \{u \in \mathbb{R} : u \leq 0\}$



Hier ist f nicht injektiv: Jedes $u < 0$ wird zweimal erreicht.

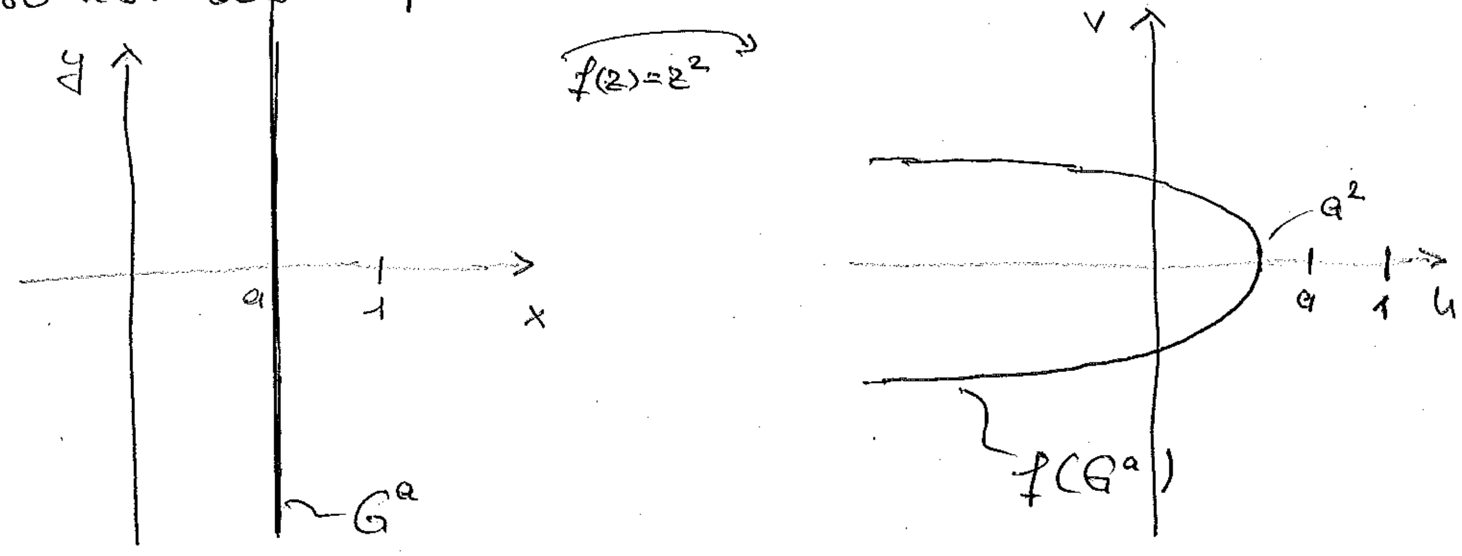
Interessanter Fall: $a>0$. Hierfür ist

$$f(a+iy) = a^2-y^2+2iay =: u+iv.$$

D.h. wir haben $2ay = v \rightsquigarrow y = \frac{v}{2a} \rightsquigarrow y^2 = \frac{v^2}{4a^2}$

und damit $u = a^2 - \frac{v^2}{4a^2}$.

Fassen wir u als reelle Funktion von $v \in \mathbb{R}$ auf, so ist der Graph von u eine Parabel:



Der vertikale Streifen $\{x+iy : 0 \leq x < a\}$ wird dabei auf das Parabelinnere (welches den Nullpunkt enthält) und die Halbebene rechts von G^a auf das Parabeläußere abgebildet. Das sieht man so:

$$f(\{x+iy : 0 \leq x < a\}) = f\Big(\bigcup_{0 \leq x < a} G^x\Big) \overset{f \text{ injektiv}}{=} \bigcup_{0 \leq x < a} f(G^x)$$

für den Streifen. Für die Halbebene rechts von G^a genauso.

(Bem.: Wird schon für $n=3$ kompliziert.)

Aufg. 1: Bestimmen Sie $f(G)$ für eine beliebige Gerade G ④

(a) durch den Nullpunkt und

(b) $G = e^{i\varphi} \cdot G^a$ mit $a > 0$ und $\varphi \in (0, 2\pi)$.

(Die Formulierung von Teil (b) zeigt bereits an, wie Sie die Lösung der Aufgabe auf das Bisherige zurückführen können!)

Aufg. 2: Immer noch zu $f(z) = z^2$: Welche Kurven $C \subset \mathbb{C}$ werden von f auf

(a) die vertikale Gerade G^a wie oben und

(b) die horizontale Gerade $G_b := \{x + ib : x \in \mathbb{R}\}$ mit $b > 0$

abgebildet. Können Sie auch dies auf beliebige Geraden, die nicht durch $z_0 = 0$ gehen, verallgemeinern?

Aufg. 3: Hier sei $f(z) = z^n$ mit einem $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Bestimmen Bild und Urbild unter f

(a) eines Kreises vom Radius $R > 0$;

(b) einer Halbgeraden $\{re^{i\varphi} : r \geq 0\}$ mit $\varphi \in (0, 2\pi)$ fest;

(c) eines Sektors $S_{R,\varphi} := \{re^{it} : 0 < r < R, 0 < t < \varphi\}$.

(Auch in (c) sei $0 < \varphi < 2\pi$.)