3. Tutorium zur Funktionentheorie, 06.05.21

Zunächst einige Hinweise zur Aufg. 11 (Bew. des Satzes von Gauss-Lucas)

(i) Dort ist ein Polynom $P: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto P(z) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu$ der Variable $z \in \mathbb{C}$ allein gemeint. (Nicht eine $P(z, \bar{z})$, wie ich es in der Vorlesung einmal aufgeschrieben habe.)

(ii) Hierfür sollten Sie den Fundamentalsatz der Algebra verwenden, der im weiteren Verlauf der Vorlesung erst noch gezeigt werden soll. Der Fundamentalsatz sagt aus, dass ein Polynom wie oben über $\mathbb{C}$ vollständig in Linearfaktoren zerfällt: D.h. dass Nullstellen $z_1, \dots, z_n$ existieren (möglicherweise teilweise identisch) und ein $c \in \mathbb{C}$, so dass

$$P(z) = c \cdot \prod_{k=1}^{n} (z - z_k).$$

(iii) Die konvexe Hülle einer Menge $M \subset \mathbb{C}$ ist

$$\operatorname{conv}(M) := \Big\{ \sum_{\nu=1}^{N} \lambda_\nu z_\nu : N \in \mathbb{N},\ z_\nu \in M,\ \lambda_\nu \geq 0,\ \sum_{\nu=1}^{N} \lambda_\nu = 1 \Big\}.$$

Besteht M aus zwei Punkten, ist $\operatorname{conv}(M)$ deren Verbindungsstrecke; besteht M aus drei Punkten, ist $\operatorname{conv}(M)$ das abgeschlossene Dreieck, dessen Ecken die drei Punkte sind usw.

Ausserdem möchte ich heute die Wirtinger-Ableitungen ②

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

zum Thema machen, erst denen Sie in den Aufgaben 10 und 12 von Blatt 3 rechnen sollen:

Im Abschnitt 3.3 der Vorlesung habe ich versucht zu motivieren, zu welchem Zweck man diese Operatoren einführt. Im Satz 4 dieses Abschnitts 3.3 sind eine Reihe von Rechenregeln zusammengestellt, die nur zum Teil bewiesen werden. Daraus ergibt sich auch gleich die erste Aufgabe:

A1: Beweisen die Teile (4), (5) und (7) des genannten Satzes.

Der Satz ist auf der nächsten Seite noch einmal wiedergegeben. Zum Beweis von (7) bietet es sich an, die Kettenregel aus Ana II für die vorliegende Situation

$$\mathbb{R} \supset I \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f_L} \mathbb{R} \qquad (f = (f_1, f_2))$$

zu verwenden. (Erinnern Sie sich?)

<u>Bez.</u>: Für $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{N}_0$ ist

$C^k(\Omega, \Omega') := \{ f : \Omega \to \Omega' : f$ ist k-mal stetig diff'bar$\}$

und $C^k(\Omega) := C^k(\Omega, \mathbb{R})$.

Im nächsten Satz werden einige Rechenregeln für die Wirtinger-Ableitungen zusammengestellt.

<u>Satz 4</u>: Es seien $f : \Omega \to \mathbb{C}$ reell differenzierbar (in Regel (5): $f \in C^2(\Omega, \mathbb{C})$) und $F : f(\Omega) \to \mathbb{C}$ reell diff'bar, sowie $\varphi : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{C}$ diff'bar. Dann:

(1) $\frac{\partial}{\partial z}$ und $\frac{\partial}{\partial \bar z}$ sind $\mathbb{C}$-lineare Operatoren, für die die Produkt- und Quotientenregel gelten.

(2) $\overline{\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{\partial \bar f}{\partial \bar z}$ und $\overline{\frac{\partial f}{\partial \bar z}} = \frac{\partial \bar f}{\partial z}$.

(3) Ist f reell, so gilt $\overline{\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{\partial f}{\partial \bar z}$.

(4) $\frac{\partial z}{\partial z} = \frac{\partial \bar z}{\partial \bar z} = 1, \quad \frac{\partial \bar z}{\partial z} = \frac{\partial z}{\partial \bar z} = 0$.

(5) $4 \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar z} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \Delta f$ (Laplace-Operator)

Es gelten die folgenden Versionen der Kettenregel:

(6) $$\frac{\partial F \circ f}{\partial z}(z) = \frac{\partial F}{\partial w}(f(z)) \cdot \frac{\partial f}{\partial z}(z) + \frac{\partial F}{\partial \bar w}(f(z)) \cdot \frac{\partial \bar f}{\partial z}(z)$$

$$\frac{\partial F \circ f}{\partial \bar z}(z) = \frac{\partial F}{\partial w}(f(z)) \cdot \frac{\partial f}{\partial \bar z}(z) + \frac{\partial F}{\partial \bar w}(f(z)) \cdot \frac{\partial \bar f}{\partial \bar z}(z)$$

(7) $$\frac{d\, f \circ \varphi}{dt}(t) = \frac{\partial f}{\partial z}(\varphi(t)) \frac{d\varphi}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial \bar z}(\varphi(t)) \cdot \frac{d\bar\varphi}{dt}(t).$$

Der zweite Teil von (4) erlaubt uns, die Variablen z und $\bar{z}$ als unabhängig zu betrachten. Das bedeutet: bei den Ableitungsoperatoren $\frac{\partial}{\partial z}$ und $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ kann man bei Anwendung auf Funktionen

$$f : \mathbb{C} \supset \Omega \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto f(z),$$

die die Gestalt $f(z) = g(z, \bar{z})$ haben, genauso rechnen wie mit den partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ bei einer Funktion, die von $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ abhängt.

Bsp.: $\quad f(z) = e^{iz} \cdot 2\,\mathrm{Re}(\bar{z}^2), \quad z \in \mathbb{C}$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z) = i \cdot e^{iz} \cdot 2\,\mathrm{Re}(\bar{z}^2) + e^{iz} \cdot \frac{\partial}{\partial z}(\bar{z}^2 + z^2)$$

$$= e^{iz}\left(i\bar{z}^2 + iz^2 + 2z\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = e^{iz} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\bar{z}^2 + z^2) = e^{iz} \cdot 2\bar{z}.$$

Aufg. 2: Berechnen Sie die Wirtinger-Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial z}(z)$ und $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z)$ für die folgenden Funktionen:

(a) $f(z) = |\exp(z^2 \bar{z})|$

(b) $f(z) = x^2 + ixy + \cos(x^2 + y^2)$ (wobei $z = x + iy$)

(c) $f(z) = |z| \cdot \ln(\sin(z))$ (existieren die Wirtinger-Ableitungen im Nullpunkt?)

(d) $f(z) = \dfrac{z^2 - \bar{z}^2}{1 + |z|^2}$.