4. Tutorium zur Funktionentheorie, 20.05.21 ①

Auf Blatt 5 geht es überwiegend um Anwendungen des Cauchyschen Integralsatzes für sternförmige Gebiete. Hier noch einmal der Wortlaut:

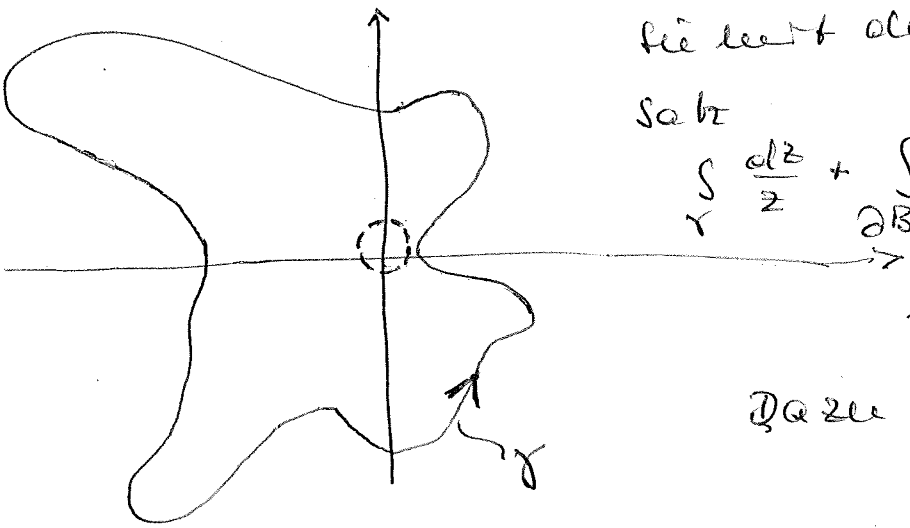
Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet und $f: G \to \mathbb{C}$ stetig, mit Ausnahme endlich vieler Punkte holomorph. Dann gilt für jeden geschlossenen, stückweisen C^1-Weg $\gamma: [a,b] \longrightarrow G$, dass

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Aufg. 1 Es seien $r: [0, 2\pi] \longrightarrow (0,\infty)$, $t \longmapsto r(t)$ stetig und stückweise C^1 sowie

$$\gamma: [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad t \longmapsto \gamma(t) := r(t) \cdot e^{it}.$$

Berechnen Sie $\int_\gamma \frac{dz}{z}$. Tipp dazu: Wählen Sie $\varepsilon > 0$, sodass $\varepsilon < \min\{r(t) : t \in [0,2\pi]\}$. Berechnen



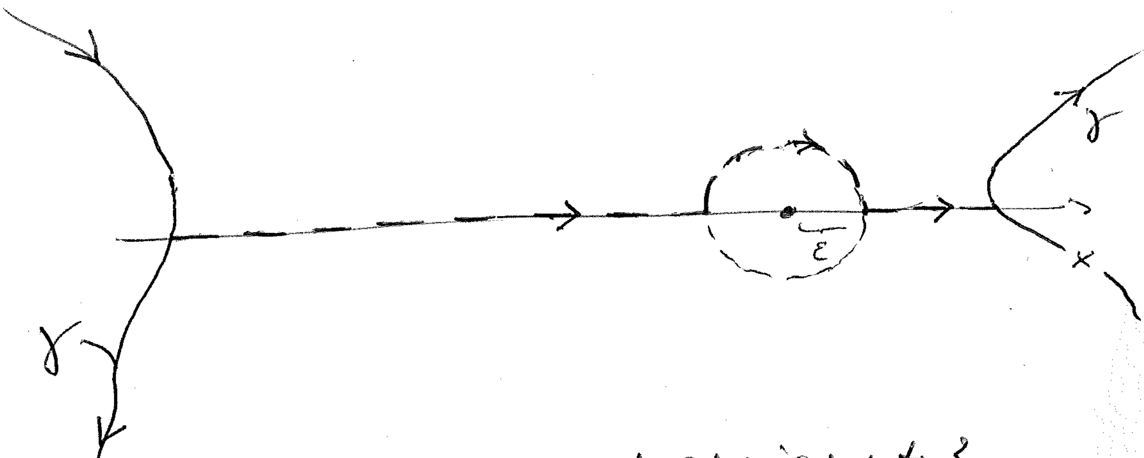
Sie mit dem Integralsatz

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} + \int_{\partial B_\varepsilon(0)^-} \frac{dz}{z} \; !$$

Dazu ... $\longrightarrow$

... müssen Sie einige Wegstücke ergänzen, damit die Voraussetzungen des Integralsatzes erfüllt sind.

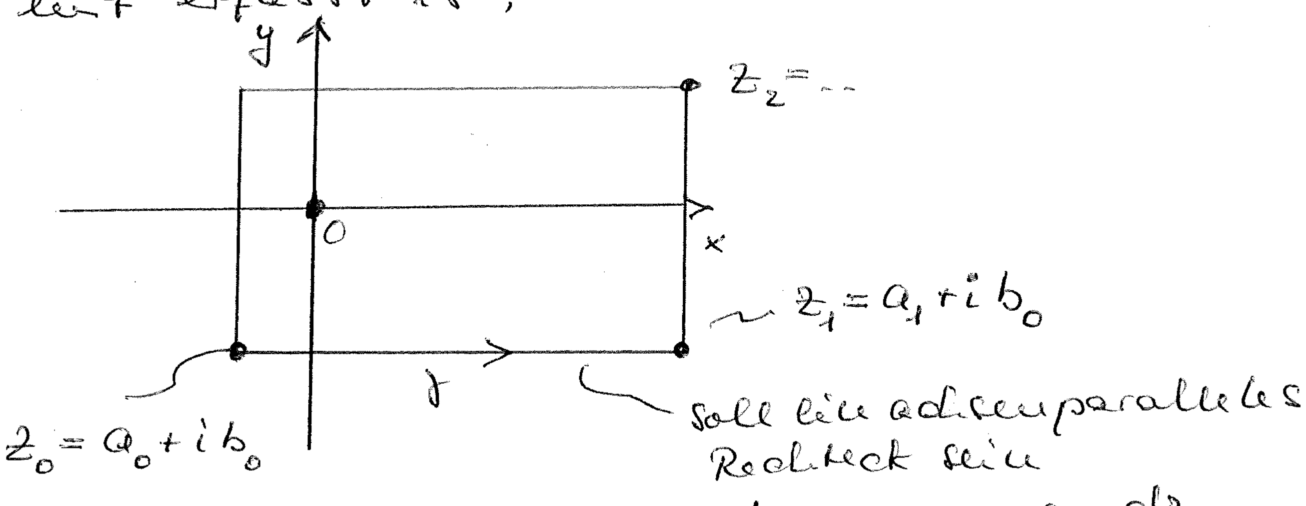
Vergrößerung: (Vorschlag!)



Welche sternförmigen Gebiete sind geeignet?

Wenn Sie zusätzliche Wegstücke einbauen, sollten sich deren Beiträge natürlich gerade zu Null ergänzen – sonst müssen Sie diese ausrechnen.

Bem.: Eine Situation, die in der Aufgabenstellung mit erfasst ist, ist die folgende



Aufg b: Integrieren Sie $\int_{[z_0, z_1]} \frac{dz}{z}$ oder $\int_{[z_1, z_2]} \frac{dz}{z}$.

(Dabei können Sie erahnen, wieviel Arbeit Ihnen der Integralsatz abnimmt. Dennoch ist die Übung sinnvoll, denn Sie lernen schon etwas über den komplexen Logarithmus bzw. die komplexen Logarithmusfunktionen.)

Falls die beiden Aufgaben noch nicht ausreichen, hier noch etwas zur Cauchyschen Integralformel:

<u>Aufg.</u> 3: Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int_{\partial B_2(0)^+} \frac{d\xi}{\xi^2+1}$ (b) $\displaystyle\int_{\partial B_1(i)^+} \frac{d\xi}{\xi^2+1}$

(c) $\displaystyle\int_{\partial B_2(i)^+} \frac{d\xi}{(\xi-1)^2(\xi-2)}$

<u>Hinweis</u>: Für (a) und (c) empfiehlt sich eine PBZ.

In (a) genügt $\displaystyle\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b}\right)$

mit geeigneten a und b. In (c) sollten Sie ansetzen:

$$\frac{1}{(\xi-1)^2}\,\frac{1}{\xi-2} = \frac{a_{11}}{\xi-1} + \frac{a_{12}}{(\xi-1)^2} + \frac{a_2}{\xi-2}\,.$$