6. Tutorium zu FT am 10.06.21 

Hinweise zu Blatt 7:

In den Aufgaben 24. und 25. geht es um Potenzreihenentwicklungen holomorpher Funktionen. Die umfangreiche Aufg. 24 sollten Sie gut bearbeiten können, wenn Sie den 2. Teil von Abschnitt 8 (S. 97 ff) studiert haben – dort werden u.a. die Bernoulli-Zahlen diskutiert. Für Aufg. 25.: Vgl. 5. Tutorium vom 27.05.

Bei den Aufgaben 26 und 27 handelt es sich um Anwendungen des Satzes von Liouville:

"Jede beschränkte ganze Funktion $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist konstant."

Hiermit möchte ich mich im heutigen Tutorium befassen. Zunächst sei daran erinnert, dass der Satz von Liouville ein – häufig verwendeter – Spezialfall ($n=0$) der folgenden allgemeinen Aussage ist:

Abschnitt 9, Satz 8: Es sei $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion. Es gebe $R, M > 0$ und ein $n \in \mathbb{N}_0$, so dass

fehlt im Skript!

$$|f(z)| \leq M\,|z|^n \qquad \forall z \in B_R(0)^c.$$

Dann ist $f$ ein Polynom vom Grad $\leq n$.

Man kann den Satz von Liouville leicht dahingehend verschärfen, dass man nur die Beschränktheit des Real- oder des Imaginärteils einer ganzen Funktion $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ benötigt, um darauf schließen zu können, dass $f$ konstant ist:

Beh.: Es sei $f = g + ih : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion (mit $g, h : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$). Ist $g$ beschränkt, so ist $f$ konstant.

Bew.: Sei $M > 0$, so dass $|g(z)| \leq M$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Wir definieren

$$F(z) := \exp(f(z)) = \exp(g(z) + ih(z)) = \exp(g(z))\exp(ih(z)).$$

Dann ist

$$|F(z)| = |\exp(g(z))\exp(ih(z))| = \exp(g(z)) \leq e^M.$$

Da $F$ als Verknüpfung ganzer Funktionen ebenfalls ganz ist, ergibt der Satz von

Liouville: $F$ ist konstant.

Dann ist insbes. $|F| = \exp g$ und damit auch $g$ konstant. (Da $g$ reell ist, können wir logarithmieren.) Aus den Cauchy-Riemann-Dgln.

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{\partial h}{\partial x}$$

folgt jetzt $0 = |\nabla g(z)|^2 = |\nabla h(z)|^2$. Also ist auch $h$ und damit $f$ konstant.

Aufg. 1 Es sei $f = g + ih : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion (mit $g, h : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$). Zeigen Sie:

(a) Ist $h$ beschränkt, so ist $f$ konstant.

(b) Ist $g(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$, so ist $f$ konst.

(c) Wenn $f$ nicht konstant ist, so sind $g : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ und $h : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ surjektiv.

Es reicht, (c) zu zeigen. (Klar?) Aber vielleicht machen Sie es lieber "step by step".

Anschließend noch drei Verständnisfragen, die in diesem Zshg. nahe liegen:

Fragen:

(1) Ist ein nicht konstantes Polynom

$$P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \longmapsto P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

surjektiv?

(2) Ist jede nicht konstante, ganze Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ surjektiv?

(3) Welche Nullstellen haben Re(exp) bzw. Im(exp)? (Solche muss es ja nach Teil (c) der obigen Aufg. geben.)