7. Tutorium zur Funktionentheorie am 17.06.21

Auf Blatt 8 geht es in fast allen Aufgaben um das Maximumprinzip. Dieses ist in der Vorlesung in zwei verschiedenen Versionen gezeigt worden, s. A 9.3.

Satz G: Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f: G \to \mathbb{C}$ holomorph.

(1) Wenn $|f|$ in $z_0 \in G$ ein lokales Maximum besitzt, ist f konstant.

(2) Ist zudem G beschränkt und $f \in C(\overline{G})$, so gilt

$$\max\{|f(z)| : z \in \overline{G}\} = \max\{|f(z)| : z \in \partial G\}.$$

Wendet man diesen Satz auf $\frac{1}{f}$ an, so erhält man:

(1) Hat $|f|$ in $z_0 \in G$ ein lokales Minimum, so ist $f(z_0) = 0$ oder f konstant.

(2) Ist zudem G beschränkt und $f \in C(\overline{G})$, so hat f (mindestens) eine Nullstelle in G, oder $|f|$ nimmt ihr Minimum auf ∂G an.

Mit Hilfe dieses "Minimumprinzips" sollen Sie in A 31 zeigen, dass jedes nicht-konstante Polynom $P: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto P(z)$ in $\mathbb{C}$ eine Nullstelle besitzt.

Die zweite Version des Maximumprinzips gilt für Funktionen $f: \Omega \to \mathbb{C}$, die die Mittelwerteigenschaft (MWE) besitzen. Das bedeutet:

f ist stetig, und zu jedem $z_0 \in \Omega$ gibt es ein $R > 0$, so dass für alle $r \in (0, R)$ gilt

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\, dt.$$

Das trifft auf holomorphe Funktionen und auch auf die Real- und Imaginärteile holomorpher Funktionen zu. In Abschnitt 10.1 haben wir gesehen, dass darüber alle harmonischen Funktionen die MWE besitzen.

In der "Einführung in partielle Differentialgleichungen" werden wir dann zeigen, dass dies eine charakterisierende Eigenschaft harmonischer Funktionen (auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, mit $n \geq 2$) ist.

Die zweite Version des Maximumprinzips lautet:

Satz 7: Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f: \Omega \to \mathbb{C}$ eine Funktion, die die MWE besitzt, und es gelte

(1) f ist reellwertig und besitzt in $z_0 \in \Omega$ ein lokales Extremum; oder

(2) $|f|$ besitzt in $z_0 \in \Omega$ ein lokales Maximum.

Dann ist f auf einer Umgebung $B_\varepsilon(z_0)$ konstant. Ist ferner Ω ein Gebiet und handelt es sich bei z_0 um eine globale Extremstelle, so ist f auf Ω konstant.

Auch hier kann man folgern: Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein <u>beschränktes</u> Gebiet und $f \in C(\bar{G})$ eine Funktion mit MWE, so nimmt f (bzw. $|f|$) ihr Maximum auf ∂G an.

Aufg. 1: Bestimmen Sie

$$\max \{ |f(z)| : |z| \leq 1 \}$$

für die Funktion $f(z) = z^4 - z^2$ und allgemeiner für $f(z) = z^n - z^m$ mit $n, m \in \mathbb{N}_0$ und $m < n$.

Aufg. 2: Maximieren Sie die Funktion

$$f(x+iy) := x^3 - 3xy^2$$ auf

(a) $Q := \{x+iy \in \mathbb{C} : |x| \leq 1 \text{ und } |y| \leq 1\}$ und

(b) $B_e := \{x+iy \in \mathbb{C} : x^2+y^2 \leq 1 \text{ und } x \leq 0\}$.

Soweit zwei konkrete Rechenaufgaben. Etwas theoretischer ist

Aufg. 3: Es seien $R > 0$, $f : B_R(0) \to \mathbb{C}$ holomorph und $M : [0,R) \to \mathbb{R}$, $\varrho \mapsto M(\varrho) := \sup\{|f(z)| : |z| = \varrho\}$.

Zeigen Sie: (a) M ist monoton wachsend und

(b) genau dann streng monoton, wenn f nicht konstant ist.

(Wenn noch Zeit bleibt: (c) M ist stetig. Das hat aber nur wenig mit dem Maximum-Prinzip zu tun.)