8. Tutorium zur Funktionentheorie am 24.06.21

Heute möchte ich den <u>Identitätssatz für holomorphe Funktionen</u> thematisieren, auf dem anstehenden Blatt 9 kann dieser bei zwei Aufgaben von Nutzen sein:

Abschnitt 8, ~~Blatt~~ Satz 3: Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $M \subset G$ eine Menge, die einen Häufungspunkt $z_0 \in G$ besitzt. $f, g: G \to \mathbb{C}$ seien holomorphe Funktionen, die auf M übereinstimmen. Dann gilt bereits $f = g$.

Da holomorphe Funktionen überall lokal in eine Potenzreihe entwickelt werden können, lässt sich dieser Identitätssatz auf den folgenden Identitätssatz für Potenzreihen zurückführen:

Abschnitt 8, Satz 2: Sei $M \subset \mathbb{C}$ eine Menge mit Häufungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$. Die Potenzreihen $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ und $Q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n$ seien für alle $z \in M$ konvergent und es gelte $P|_M = Q|_M$. Dann ist $a_n = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Aufg. 1 Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Sind $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $Q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ Potenzreihen, so dass die Gleichung $P(z) = Q(z)$ unendlich viele Lösungen hat, so gilt $a_n = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(b) Ist $f : B_1(0) \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $f(\frac{1}{n}) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt $f \equiv 0$.

Aufg. 2: Untersuchen Sie, ob und ggf. wie viele holomorphe Funktionen $f : B_1(0) \to \mathbb{C}$ existieren, so dass

(a) $f(\frac{1}{n}) = f(-\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$;

(b) $f(\frac{1}{n}) = f(-\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^5}$ $\forall n \in \mathbb{N}$;

(c) $f(\frac{1}{n^2}) = \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$;

(e) $f^{(n)}(0) = (n+1)!$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$;

(f) $f^{(n)}(0) = n!$ $\forall n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$;

(g) $f^{(n)}(0) = (n!)^2$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$.

Bestimmen Sie f, sofern dies möglich ist.

Aufg. 3: Es sei $r>0$ und $f: B_r(0) \to \mathbb{C}$ holomorph. ③

Für alle $z \in B_r(0) \cap \mathbb{R}$ sei $f(z) \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

Für alle $z \in B_r(0)$ ist $\overline{f(z)} = f(\overline{z})$.

Aufg. 4: Es seien $f, g: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen und es gelte

$$f(g(z)) = 0 \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Zeigen Sie: Ist g nicht konstant, so ist $f \equiv 0$.