9. Tutorium zur Funktionentheorie am 01.07.21

①

Thema: Logarithmusfunktionen

Def.: Sei $G \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ein Gebiet. Eine stetige Funktion $L: G \to \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft

$$\forall z \in G: \quad e^{L(z)} = z$$

heißt eine Logarithmusfunktion auf G.

Basic facts:

- Ist $L: G \to \mathbb{C}$ eine Logarithmusfunktion und, für $k \in \mathbb{Z}$, $\quad L_k: G \to \mathbb{C},\ z \mapsto L_k(z) := L(z) + 2\pi i k$, so ist L_k ebenfalls eine Logarithmusfunktion auf G. Weitere Log-Funktionen auf G gibt es nicht.
- Logarithmusfunktionen $L: G \to \mathbb{C}$ sind injektiv und holomorph mit $L'(z) = \frac{1}{z}\ \forall z \in G$
- Wenn auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ eine Stammfunktion F von $f(z) = \frac{1}{z}$ existiert, so ist $F - c_0$ (mit einer geeigneten Konstante c_0) eine Logarithmusfunktion.

Von besonderer Bedeutung ist der Hauptzweig des Logarithmus. Zur Erklärung sei

$$\overset{\circ}{S}_{-\pi} := \{ z = x + iy \in \mathbb{C} : -\pi < y < \pi \}$$

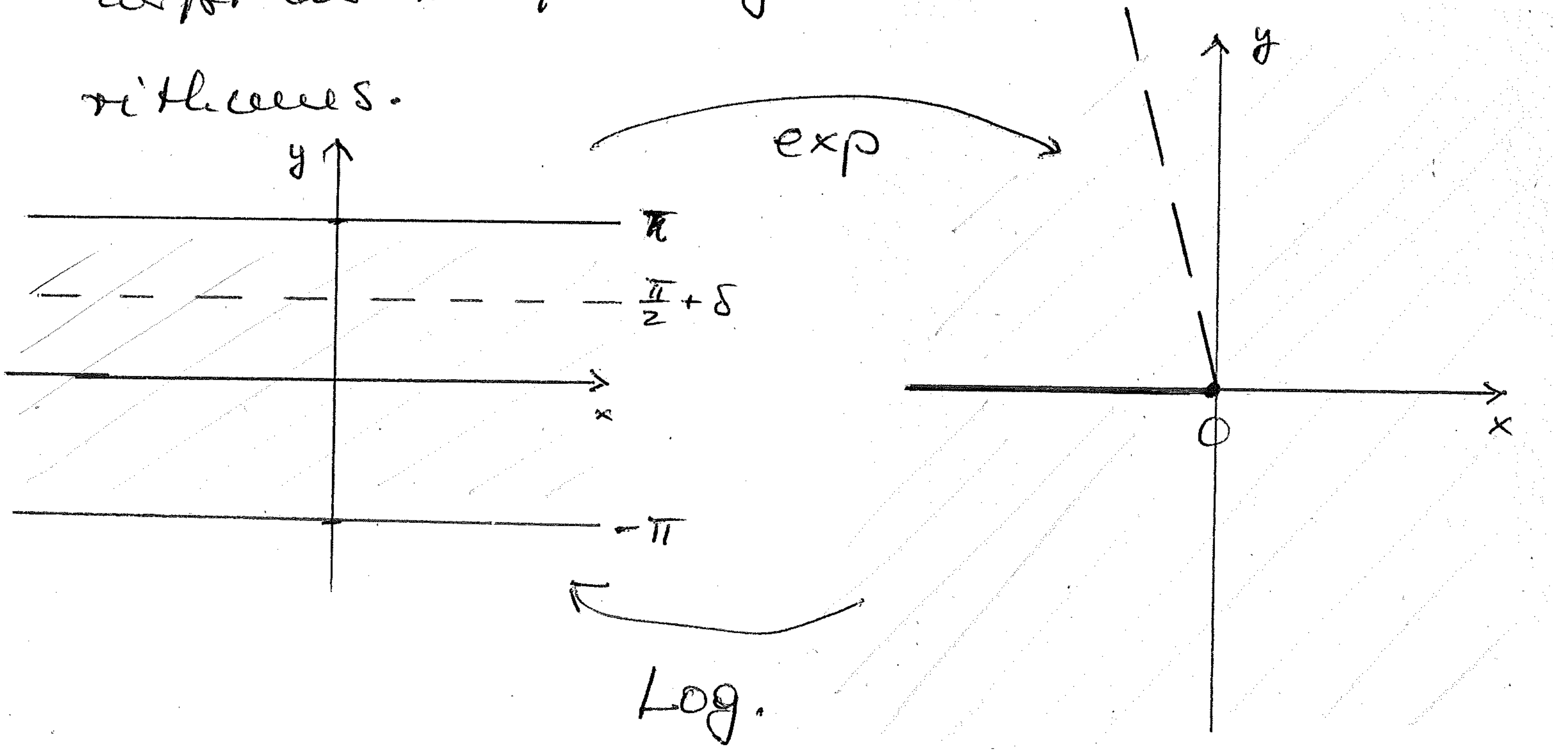
Dann ist die Einschränkung der e-Funktion auf $\overset{\circ}{S}_{-\pi}$

$$\exp\big|_{\overset{\circ}{S}_{-\pi}} : \overset{\circ}{S}_{-\pi} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$$

biholomorph. Ihre Umkehrfunktion

$$\mathrm{Log} : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \longrightarrow \overset{\circ}{S}_{-\pi}$$

heißt der Hauptzweig des (komplexen) Logarithmus.



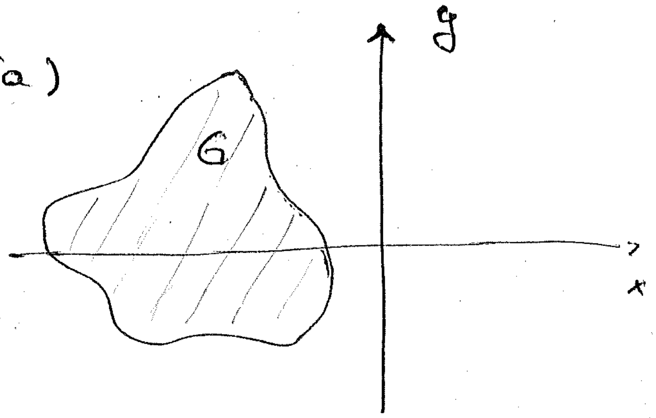
Hieraus ergibt sich: Ist $x < 0$, so gelten

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \mathrm{Log}(x + i\varepsilon) = \ln(|x|) + i\pi$$

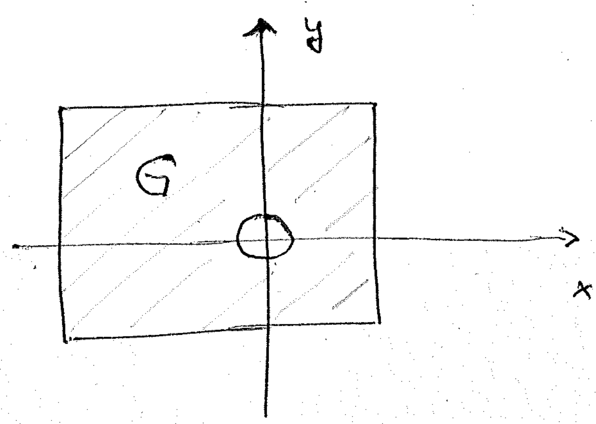
$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \mathrm{Log}(x - i\varepsilon) = \ln(|x|) - i\pi \, .$$

Aufg. 1: Auf welchen der folgenden Gebiete existiert eine Logarithmusfunktion?

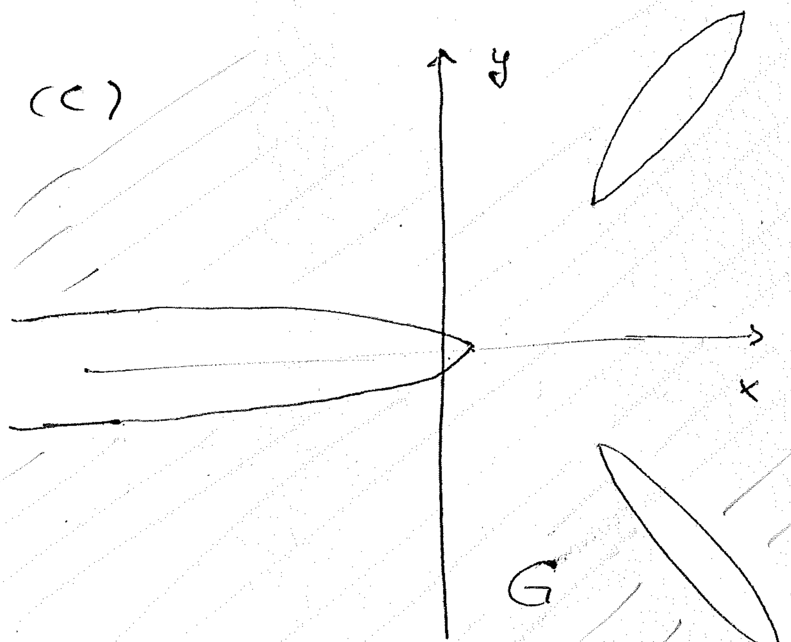
(a)



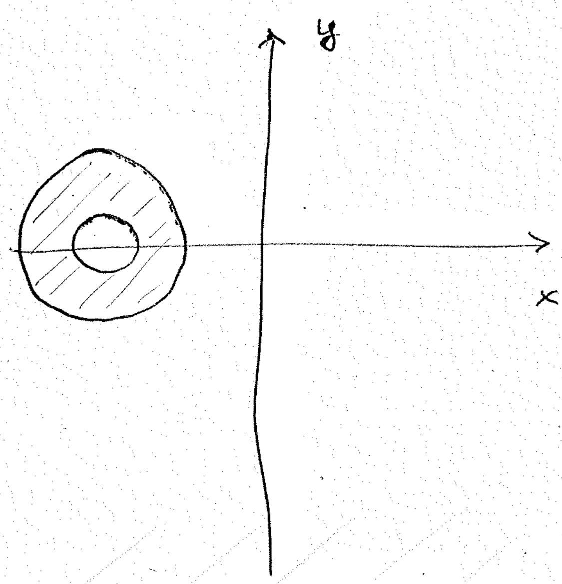
(b)



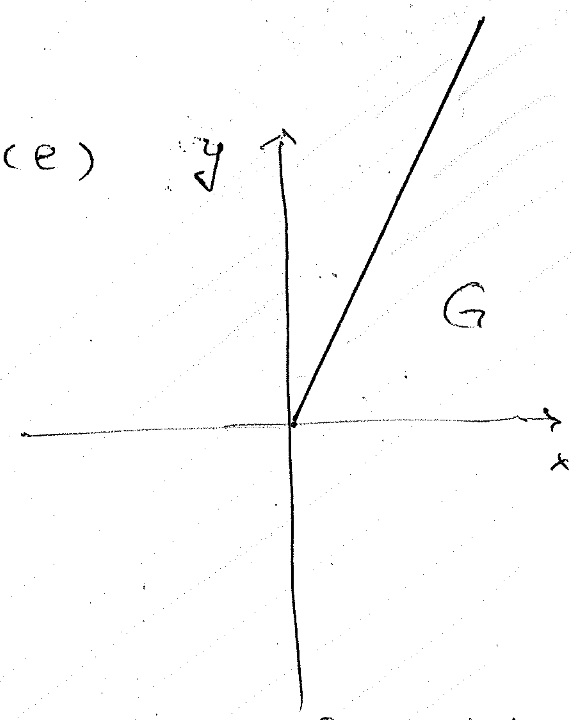
(c)



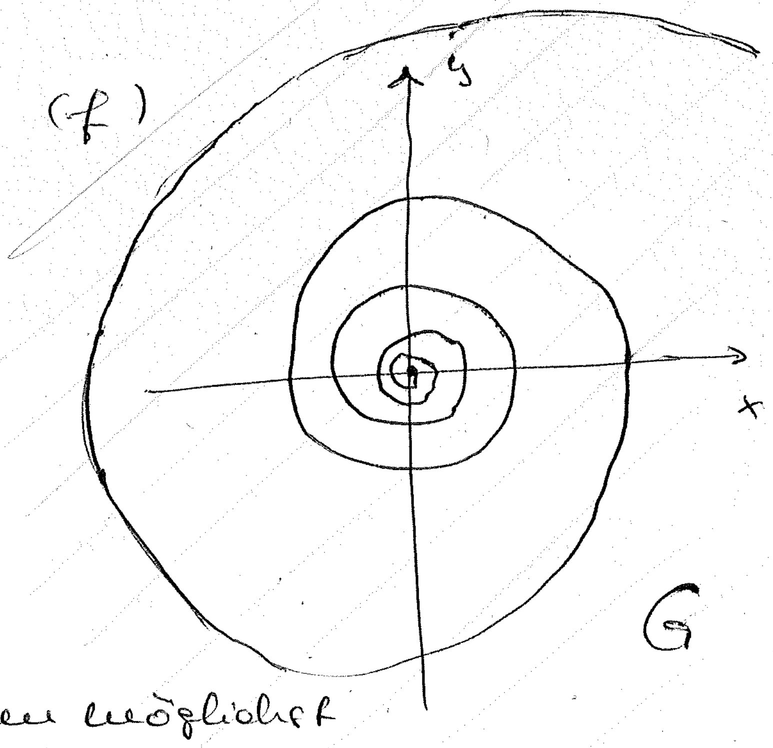
(d)



(e)



(f)



Begründen Sie mit einem möglichst einfachen Argument.

Aufg. 2: Es sei $\mathrm{Log}: \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ der Hauptzweig des Logarithmus. Berechnen Sie

(a) $\mathrm{Log}(i)$ (b) $\mathrm{Log}(i^3)$

(c) $\mathrm{Log}((1-i)^3)$ (d) $\mathrm{Log}((1-i)^5)$.

In welchen Fällen gilt $\mathrm{Log}(z^n) = n \cdot \mathrm{Log}(z)$?

Aufg. 3: Es sei $G = \mathbb{C} \setminus \{ r \cdot e^{\frac{3\pi i}{4}} : r \geq 0 \}$ und $L: G \to \mathbb{C}$ eine Logarithmusfunktion mit $L(1) = 0$.

Bestimmen Sie

(a) Das Bild von G unter L,

(b) $L(-1)$,

(c) eine Potenzreihenentwicklung von L mit dem Entwicklungspunkt $z_0 = -1$.

Zusatz zu (c): Welchen Konvergenzradius hat diese Reihe und wo stellt sie L dar?