10. Tutorium zur Funktionentheorie am 08.07.21

Anwendungen des Residuensatzes zur Berechnung von (uneigentlichen) Integralen.

In Abschnitt 13 haben wir dazu die folgenden drei Sätze gezeigt:

Satz 2: Es sei $R = \frac{P}{Q}$ eine rationale Funktion, so dass

(i) $Q(x) \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, (ii) $\deg Q \geq \deg P + 2$.

$z_1, \dots, z_n$ seien die paarweise verschiedenen Nullstellen von Q in der oberen Halbebene. Dann gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}_{z_k}(R).$$

Unter denselben Voraussetzungen, wobei man sogar noch (ii) abschwächen kann zu: $\deg Q \geq \deg P + 1$,

gilt (Satz 3): $$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) e^{ix}\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}_{z_k}(R \cdot e^{i\cdot}).$$

Satz 4: Es sei $R(v, w)$ eine rationale Funktion der komplexen Veränderlichen v und w sowie

$$f(z) := R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right)$$

Auf $\partial B_1(0)$ sollen keine Nullstellen des Nenners von f liegen. Dann ist

$$\int_0^{2\pi} R(\cos(t), \sin(t))\,dt = \int_{\partial B_1(0)^+} \frac{f(z)}{iz}\,dz$$

Aufg. 1 (zu Satz 2): Berechnen Sie für $a, b > 0$ das Integral ②

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} .$$

Aufg. 2 (zu Satz 3): Berechnen Sie das uneigentliche Integral

$$J := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cdot e^{ix}}{1+x^2}\, dx$$

und führen darauf das Integral

$$J_+ := \int_0^{\infty} \frac{x \cdot \sin(x)}{1+x^2}\, dx$$

zurück. (Konvergieren J und J_+ absolut?)

Aufg. 3 (zu Satz 3) Berechnen Sie die Fouriertransformierte von $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = \frac{1}{1+x^4}$, also das parameterabhängige Integral

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix\xi}}{1+x^4}\, dx \qquad (\xi \in \mathbb{R})$$

Hinweis: Für $\hat{f}(0)$ vgl. Bsp. (1) zu Satz 2. Ferner ist leicht zu sehen, dass $\hat{f}$ eine gerade Funktion ist.

Aufg. 4 (zu Satz 4): Berechnen Sie für $a > 1$

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(a+\cos(t))^2}$$

Können Sie hieraus auch $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(a+b\cos(t))^2}$ für $a > b > 0$ gewinnen?