Nach dem Riemannschen Abbildungssatz kann jedes einfach zusammenhängende Gebiet $G \subsetneq \mathbb{C}$ biholomorph auf den Einheitskreis $B_1(0)$ abgebildet werden. (Beweis in der letzten Vorlesung)

Das ist ein tiefliegender Satz – im Allgemeinen ist es bereits ein nicht triviales Problem, für zwei konkret vorgegebene Gebiete $G_{1,2} \subset \mathbb{C}$ eine biholomorphe Abbildung $f: G_1 \xrightarrow{\sim} G_2$ explizit anzugeben. Oder zu zeigen, dass es eine solche Abbildung nicht gibt.

Einige biholomorphe Abbildungen haben wir im Lauf des Semesters bereits kennengelernt, z. B.:

- Abbildungseigenschaften der e-Funktion (und damit auch der Logarithmusfunktionen) waren Gegenstand der Aufg. 9,
- die Funktion $f(z) = z^2$ haben wir im 2. Tutorium untersucht. Mittelswerte stehen uns auch nichtganzzahlige Potenzen zur Verfügung, hierfür können wir z. B. feststellen:

- Für $\alpha > 0$ bildet die Funktion $f(z) = z^\alpha$ das Kreisringsegment

$$\{z = re^{i\varphi} : \varrho < r < R,\ \varphi_0 < \varphi < \varphi_1\}$$

auf

$$\{w = s \cdot e^{i\psi} : \varrho^\alpha < s < R^\alpha,\ \alpha\varphi_0 < \psi < \alpha\varphi_1\}$$

ab, wobei $0 \leq \varrho < R \leq \infty$ möglich ist. Wenn $\varphi_1 - \varphi_0 < 2\pi$ und $\alpha(\varphi_1 - \varphi_0) < 2\pi$ gilt, ist f biholomorph mit $f^{-1}(w) = w^{\frac{1}{\alpha}}$.

- Die Joukowski-Abbildung (Aufg. 15)

$$J : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto J(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

bildet $B_1(0) \setminus \{0\}$ (und auch $\overline{B_1(0)}^c$) biholomorph auf $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ ab und bildet $\mathbb{H}$ (wie auch $-\mathbb{H}$) biholomorph auf $\mathbb{C} \setminus ((-\infty, -1] \cup [1, \infty))$ ab.

- Die Inversion $I : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\},\ z \mapsto \frac{1}{\bar{z}} = \frac{z}{|z|^2}$ ist konform und zu sich selbst invers (A 16). Verknüpft man I mit einer komplexen Konjugation, so erhält man mit

$$f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\},\ z \mapsto f(z) = \frac{1}{z}$$

eine weitere biholomorphe Abbildung.

• Allgemeiner haben wir in Abschnitt 16 die Möbius- ③
transformationen

$$f_A(z) = \frac{a_{11} z + a_{12}}{a_{21} z + a_{22}} \qquad \left(A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \right)$$

behandelt und einige Automorphismengruppen bestimmt. z.B.

$$\mathrm{Aut}(B_1(0)) = \left\{ f_A|_{B_1(0)} : A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar\beta & \bar\alpha \end{pmatrix} : |\alpha|^2 > |\beta|^2 \right\}$$

darin: $\mathrm{Aut}_0(B_1(0)) = \{ z \mapsto \lambda z : |\lambda| = 1 \}$ (Drehungen)

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{H}) = \{ f_A|_{\mathbb{H}} : A \in SL_2(\mathbb{R}) \}$$

In diesem Zsh. haben wir festgestellt, dass für $c \in \mathbb{H}$

$$f_c : z \mapsto f_c(z) := \frac{z - c}{z - \bar c}$$

die obere Halbebene $\mathbb{H}$ biholomorph auf den Einheitskreis $B_1(0)$ abbildet. Ein wichtiger Spezialfall ist die Cayley-Transformation ($c = i$)

$$f_i : \mathbb{H} \to B_1(0), \quad z \mapsto f_i(z) = \frac{z-i}{z+i}$$

und ihr Inverses:

$$f_i^{-1} : B_1(0) \to \mathbb{H}, \quad w \mapsto f_i^{-1}(w) = i\,\frac{1+w}{1-w}.$$

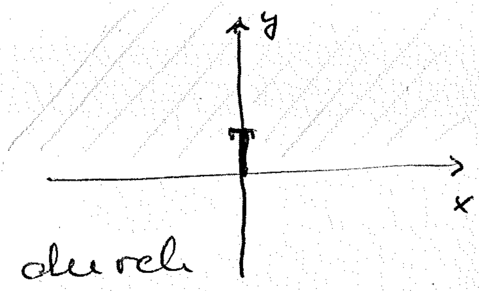
• Hinzu kommen (als spezielle MTen) Drehstreckungen $z \mapsto \lambda z$ ($\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$) und Translationen $z \mapsto z + b$ ($b \in \mathbb{C}$).

Aus diesen (vielleicht bescheidenen) Fundus lässt sich durch Verknüpfungen bereits einiges Interessante zusammenbauen, dazu heute einige Aufgaben:

<u>A1</u>: Gegeben sei das Gebiet

$$G = \{z = x+iy \in \mathbb{C} : y > 0\} \setminus \{z = iy : 0 \le y \le 1\},$$

eine "angesägte" obere Halbebene.



Begründen Sie durch Angabe der "Zwischenstationen", dass G durch die nachstehende Folge biholomorpher Funktionen auf die obere Halbebene abgebildet wird:

$$f_1(z) = -iz; \qquad f_2(z) = z^2; \qquad f_3(z) = z-1;$$

$$f_4(z) = \sqrt{z} \quad (\text{Hauptzweig der } \sqrt{}); \quad f_5(z) = iz.$$

Bestimmen Sie $f(z) = f_5 \circ f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1(z)$.
(Warum ist $f(z) \neq \sqrt{z^2+1}$ <u>und</u> $f(z) \neq -\sqrt{z^2+1}$?)
Geben Sie eine biholomorphe Abbildung

$g : G \to B_1(0)$ an!

<u>A2</u>: Finden Sie eine biholomorphe Abbildung

$$f : B_1(0) \to \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0].$$

Machen Sie ggf. einen Umweg über die obere und/oder rechte Halbebene.

A3: Es sei $G = \overline{B_1(0)}^c = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$. Finden Sie eine biholomorphe Abbildung

$$f : G \to B_1(0) \setminus \{0\}.$$

Kann es eine biholomorphe Abbildung

$$g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to G \qquad \text{oder}$$

$$h : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus [-1,1] \qquad \text{geben?}$$