MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. CHRISTIANE HELZEL
DAVID KERKMANN
MARINA FISCHER
LEONARDO SCANDURRA
FELIX LIEDER
ANDREAS TROLL

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

30. 7. 2018

Klausur zur Numerik I

(PO 2014: Erste Klausur / PO 2008: Klausur)

Bitte folgende Angaben ergänzen und **DEUTLICH LESBAR** in Druckbuchstaben schreiben:

Name: .... Vorname: ....

Matrikel-Nr.: .... Studienfach: ....

Fachsemester: ....

Hiermit bestätige ich, dass ich zu dieser schriftlichen Prüfung zugelassen bin, da ich

☐ die Zulassung im SS 2018 erworben habe,

☐ an einer schriftlichen Prüfung zur Numerik I bei .... im WS/SS .... teilgenommen, aber nicht bestanden habe,

☐ (für Informatiker und Physiker:) die Zulassung zur Prüfung im WS/SS .... erworben habe.

....
Unterschrift

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$
max. Punkte	6	10	10	7	13	4	50
err. Punkte							

Hinweis: Sie müssen bei allen Aufgaben auch Ihre Argumentation und Ihre Rechenwege aufschreiben. Falls nicht ausdrücklich in der Aufgabenstellung vermerkt, reicht es nicht aus nur Ergebnisse anzugeben. Bitte benutzen Sie für jede Aufgabe ein **neues** Blatt.

Aufgabe 1: (2 + 2 + 2 Punkte)

Bestimmen Sie für folgende Funktionen jeweils alle $p \in \mathbb{N}$ mit $f(h) = \mathcal{O}(h^p)$ für $h \to 0$.

(a)
$$f(h) = h \sin(h)$$

(b)
$$f(h) = \cos(h) - 1 + \frac{h^2}{2} - 4h^5$$

(c)
$$f(h) = \exp\left(-\frac{1}{|h|}\right)$$

Aufgabe 2: (4 + 4 + 2 Punkte)

Gegeben sei eine Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie mit Hilfe des Newtonschen dividierten Differenzenschemas das Polynom $p_f \in \mathbb{P}_2$, das die Funktion f in den Stützstellen $x_0 := \frac{1}{6},\ x_1 := \frac{1}{2}$ und $x_2 := \frac{2}{3}$ interpoliert.

(b) Integrieren Sie das Polynom aus (a), um eine interpolatorische Quadraturformel Q_2 auf dem Grundintervall $[0,1]$ in den Stützstellen $x_0,\ x_1$ und x_2 herzuleiten. Von welcher Ordnung ist Q_2 mindestens? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Verwenden Sie die Quadraturformel Q_2 aus (b), um eine Näherung an das Integral $\int_0^1 x \sin(3\pi x)\,\mathrm{d}x$ zu berechnen.

Aufgabe 3: (10 Punkte)

Es seien die Punkte

x_i	0	1	3	4
y_i	52	33	3	-16

gegeben. Geben Sie den kubischen Spline s durch die Punkte $(x_i, y_i),\ i = 0, \ldots, 3$, mit natürlichen Randbedingungen, das heißt $s''(x_0) = s''(x_3) = 0$, an.
Es ist nicht notwendig, den Spline in der Monombasis darzustellen.

Aufgabe 4: (4 + 3 Punkte)

Es sei eine interpolatorische Quadraturformel

$$Q_n(f) = \sum_{j=0}^{n} a_j f(x_j)$$

mit $0 \leq x_0 < \ldots < x_n \leq 1$ auf dem Intervall $[0,1]$ gegeben. Die Quadraturformel sei außerdem symmetrisch, das heißt es gelte

$$x_j = 1 - x_{n-j},\ j = 0,\ldots,n$$

und

$$a_j = a_{n-j},\ j = 0,\ldots,n.$$

(a) Sei

$$f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^{2k-1}$$

mit $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass f durch die Quadraturformel exakt integriert wird.

(b) Folgern Sie mit Hilfe von (a), dass die Quadraturformel Q_n eine gerade Ordnung besitzt, das heißt: Falls die Quadraturformel die Ordnung $2k-1$ für ein $k \in \mathbb{N}$ besitzt, so folgt, dass sie auch Ordnung $2k$ hat.

Aufgabe 5: (9 + 4 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die LR-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ -6 & 2 & 1 \\ 0 & 14 & 4 \end{pmatrix}$$

mit partieller Pivotisierung. Geben Sie die Matrizen P, L und R explizit an, sodass $PA = LR$ gilt.

(b) Sei $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine orthogonale Matrix. Zeigen Sie, dass Folgendes gilt:

(1) $\det(Q) = \pm 1$

(2) $\|Q\|_2 = 1$

Aufgabe 6: (1 + 1 + 2 Punkte)

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f \in C^3(\mathbb{R})$. Zur Bestimmung eines möglichen Wendepunkts von f soll das Newton-Verfahren verwendet werden.

(a) Geben Sie hierzu die passende Iterationsvorschrift $x_{k+1} = F(x_k)$ an.

(b) Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = cf(x) + d$ und $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, d \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass das Verfahren aus (a) angewandt auf g die selben Iterierten erzeugt wie dessen Anwendung auf f, wenn der selbe Startwert gewählt wird.

(c) Betrachten Sie nun die Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit

$$f(x) = \mathrm{e}^x - \frac{\mathrm{e}}{2}x^2.$$

Wenden Sie zwei Schritte Ihres Verfahrens aus (a) mit Startwert $x_0 = 0$ an.