Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. Florian Jarre
Joseph Adams M.Sc.

SoSe 2021
05.08.2021

Klausur zu Numerik I

Bitte die nächsten beiden Zeilen unbedingt ausfüllen!

Name, Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Allgemeine Hinweise: Als Hilfsmittel erlaubt sind (außer Kugelschreiber und Papier) lediglich ein beidseitig selbst handbeschriebenes DIN A 4 Blatt mit Notizen. Die Klausur ist auf den ausgeteilten Formularen zu bearbeiten, und nur diese sind abzugeben. Am Ende sind drei Bogen Schmierpapier angeheftet, sollte dies nicht ausreichen, können Sie noch eigenes benutzen, was aber nicht eingesammelt wird. Die Aufgabenverteilung ist die folgende:

A1 (Multiple Choice, bitte auf dem Blatt ankreuzen)	20 Punkte
A2 (Polynominterpolation)	10 Punkte
A3 (Polynominterpolation)	12 Punkte
A4 (Orthogonalpolynome)	10 Punkte
A5 (Ausgleichsproblem)	10 Punkte
A6 (Fixpunkte)	10 Punkte

Die Klausur gilt mit 36 (von 72 erreichbaren) Punkten als bestanden. Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Note
Punkte/Note							

Aufgabe 1 (10 Punkte) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Hier sind nur die Antworten "richtig", "falsch" oder Enthaltungen möglich. Bitte auf dem Aufgabenblatt ankreuzen!

(1) Die Polynominterpolation mit äquidistanten Knoten ist unabhängig von der Anzahl der Knoten gut konditioniert.
Antwort: richtig ◯ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

(2) Die Knoten einer Interpolationsquadraturformel sind eindeutig bestimmt.
Antwort: richtig ◯ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

(3) Der Spektralradius einer Matrix ist der Betrag ihres größten Singulärwerts.
Antwort: richtig ◯ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

(4) Die Multiplikation zweier reeller Zahlen ist gut konditioniert.
Antwort: richtig ◯ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

(5) Der periodische kubische Spline einer beliebigen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zu paarweise verschiedenen Stützstellen existiert.
Antwort: richtig ◯ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

(6) Die Cholesky-Zerlegung einer Matrix ist, falls sie existiert, nicht notwendigerweise eindeutig.
Antwort: richtig ◯ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

(7) Von jeder invertierbaren Matrix kann ohne Pivotisierung eine LR-Zerlegung berechnet werden.
Antwort: richtig ◯ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

(8) Die Simpson-Regel integriert Polynome vom Grad drei exakt.
Antwort: richtig ◯ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

(9) Das Newton-Verfahren zur Berechnung einer Nullstelle $\bar{x}$ einer zwei mal stetig differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ konvergiert in endlich vielen Schritten sofern $\det(Df(\bar{x})) \neq 0$ und der Startpunkt in einer hinreichend kleinen Umgebung von $\bar{x}$ liegt.
Antwort: richtig ◯ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

(10) Die Funktion $f : [1, \infty) \to [1, \infty)$ mit $f(x) := x + 1/x$ und der üblichen Betrags-Norm erfüllt die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes.
Antwort: richtig ◯ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Man gebe das interpolierende Polynom in der Newtonbasis “$1,\ x+1,\ (x+1)x,\ (x+1)x(x-1)$” zu den Stützpunken

$$(-1,-1), \quad (0,1), \quad (1,7), \quad (2,29)$$

an. (Alle Zwischenergebnisse sind ganzzahlig und vom Betrag kleiner als 30.)

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Es seien $x_0, ..., x_n$ paarweise verschiedene Stützstellen und $f_0, ..., f_n$ zugehörige Auswertungen einer unbekannten Funktion. Man zeige:

$$f[x_0, ..., x_n] = \sum_{k=0}^{n} \frac{f_k}{\prod_{s=0, s\neq k}^{n} (x_k - x_s)}.$$

Hinweis: Wie hängt die linke Seite mit dem führenden Koeffizienten des Interpolationspolynoms in Newton-Darstellung zusammen und wie hängt die rechte Seite mit der Lagrange-Darstellung zusammen?

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Man leite die ersten drei Orthogonalpolynome auf dem Intervall $[0, 1]$ zur Gewichtsfunktion $\omega(x) \equiv x$ mit Hauptkoeffizient 1 her (d.h. führender Term der Form $1 \cdot x^k$).

Aufgabe 5 (10 Punkte)

Zum linearen Ausgleichsproblem

$$\text{minimiere} \quad \|Ax - b\|_2^2$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gebe man die Normalengleichungen an und berechne die Lösung x. (Die Lösung ist ganzzahlig.)

Aufgabe 6 (10 Punkte)

Man zeige das System

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}(x^2 - y^2 + \frac{3}{4}), \\ y &= \frac{1}{2}(-x^2 - y^2 + 1) \end{aligned}$$

besitzt genau eine Lösung in $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.