Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. Florian Jarre
Joseph Adams M.Sc.

SoSe 2021
19.04.2021
Blatt 01

ÜBUNGEN ZUR NUMERIK I

1. (6 + 2 Punkte)

(a) Bestimmen Sie für alle Paare $i \neq j$, $i, j \in \{1, \ldots, 6\}$, ob für die unten gegebenen Funktionen $f_i \in \mathcal{O}(f_j)$ oder $f_i \in o(f_j)$ oder keins von beidem für $n \to \infty$ gilt:

$$f_1(n) = \log(n), \quad f_2(n) = \log(\sqrt{n}), \quad f_3(n) = \log(n + \log(n)),$$
$$f_4(n) = \sqrt{\log(n)}, \quad f_5(n) = \log\log(n^{\log(n)}), \quad f_6(n) = \log_2(n)$$

Nutzen Sie hierfür eine Tabelle, eine Begründung müssen Sie nicht angeben.

(b) Zeigen Sie, dass für die Funktionen $f(n) = \log(n!)$ und $g(n) = n\log(n)$ gilt, dass $f \in \mathcal{O}(g)$ und $g \in \mathcal{O}(f)$. Tatsächlich sind f und g sogar asymptotisch äquivalent.

2. (4 Punkte) Es sei $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ und $x \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie möglichst großes $p \in \mathbb{N}$ so dass

$$f''(x) = \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^p), \quad \text{für } h \to 0 \text{ gilt.}$$

3. (2 Punkte) Finden Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der Gleichung $x + 1 = 1$, wenn die Addition in binärer Gleitkommaarithmetik mit 3 Bits für die Mantisse durchgeführt wird.

4. (2 + 2 Punkte) Die folgenden Funktionen ϕ_i beschreiben mathematische Aufgaben im Sinne der Vorlesung. Bestimmen Sie jeweils die relative Konditionszahl der Aufgaben und geben Sie ggf. Bereiche an in denen die Aufgabe schlecht konditioniert ist.

$$\phi_1\colon (0, \infty) \to \mathbb{R},\ \phi_1(x) = \log(x), \qquad \phi_2\colon (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R},\ \phi_2(x) = \tan(x)$$

Bitte wenden!

Programmieraufgabe 1 (4 Punkte) Schon in der Schule lernt man die Nullstellen von quadratischen Gleichungen $ax^2 + bx + c$ zu bestimmen mit Hilfe der erweiterten pq-Formel oder auch abc-Lösungsformel:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Hierbei kann es allerdings aufgrund von Auslöschung zu einer stark fehlerbehafteten Rechnung kommen, wenn die Wurzel der Diskriminante in etwa die selbe Größenordnung hat wie der Koeffizient b.

In dieser Programmieraufgabe wird Ihnen aufgetragen ein numerisch stabiles Verfahren in einer Funktion `pqsolve(a, b, c)` zu implementieren bei dem es nicht zu der oben beschriebenen Auslöschung kommen kann.

Überlegen Sie dazu wie Sie die Tatsache, dass das Produkt der Nullstellen einer quadratischen Gleichung gleich $\frac{c}{a}$ ist (Satz von Vieta) nutzen können, um ein stabiles Verfahren zu finden. Ihre Funktion sollte außerdem mit lediglich linearen Gleichungen umgehen können und mit quadratischen Gleichungen, die keine reellen Nullstellen besitzen.

Eine genaue Beschreibung der Rückgabe der Funktion finden Sie in der auf der Vorlesungshomepage zur Verfügung gestellten *stub*-Datei. Auch darin finden Sie die naive Variante der Lösungsformel implementiert, die Sie mit der numerisch stabilen vergleichen können.

Hinweis: Geben Sie Ihre Lösung der Programmieraufgabe auch über das ILIAS bis zu dem unten angegebenen Abgabe-Termin ab. Diese Ihre Lösung können Sie dann in einer der Programmierübungen der selben Woche vorstellen um die Punkte zu erhalten.

Abgabe: elektronisch bis Mo., 26.04., 12.00 Uhr
Besprechung: 26.04 - 30.04., in den Übungen