Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. Florian Jarre
Joseph Adams M.Sc.

SoSe 2021
26.04.2021
Blatt 02

ÜBUNGEN ZUR NUMERIK I

5. (2 + 2 + 1 Punkte) Es seien die folgenden Auswertungen einer unbekannten Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben

x	-1	1	0	-2
$f(x)$	2	4	5	-5

Berechnen Sie das Interpolationspolynom zu den gegebenen Stützstellen und Funktionswerten

(a) bezüglich der Langrange Fundamentalpolynome, d.h. bestimmen Sie für die Darstellung $p_n(x) = \sum_{j=0}^n f_j l_{jn}(x)$ die Koeffizienten f_j und die Polynome l_{jn}.

(b) bezüglich der Newton Basis von $\mathbb{P}_n$, d.h. bestimmen Sie für die Darstellung $p_n(x) = \sum_{j=0}^n f[x_0, x_1, \ldots, x_j] w_j(x)$ die Koeffizienten $f[x_0, x_1, \ldots, x_j]$ und die Polynome w_j.

Werten Sie die das Interpolationspolynom für $x = 2$ und $x = 3$ aus.

6. (2 Punkte) Zeigen Sie, dass für $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ und eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt

$$f[x_0, x_1] = f'(x_0) + \mathcal{O}(|x_0 - x_1|), \quad \text{für } |x_0 - x_1| \to 0.$$

7. (6 Punkte) Für Funktionen $g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definieren wir $f(x) = g(x)h(x)$ für $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, die Produktregel für dividierte Differenzen von f:

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \sum_{j=0}^{n} g[x_0, x_1, \ldots, x_j] h[x_j, x_{j+1}, \ldots, x_n].$$

Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst, warum $f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = ((\cdot - x_{n+1})f)[x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}]$.

8. (4 Punkte) Es seien paarweise verschiedene $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ gegeben. Zeigen Sie, dass für die Vandermonde Matrix $V_n = (x_i^{j-1})_{i,j=1,\ldots,n}$ gilt $\det(V_n) = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$.

Bitte wenden!

Programmieraufgabe 2 (6 + 3 Punkte) In dieser Aufgabe sollen Sie die Berechnung der dividierten Differenzen implementieren und für verschiedene Funktionen die zugehörigen Interpolationspolynome plotten.

(a) Schreiben Sie eine Funktion `divDiff(xs, fs)`, die in Abhängigkeit von gegebenen Stützstellen `xs` und Auswertungen einer unbekannten Funktion `fs` deren dividierte Differenzen $f[x_0], f[x_0, x_1], \ldots, f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ berechnet.

(b) Plotten Sie das Interpolationspolynom für

  (i) $f(x) = \sin(x)$ mit den Stützstellen $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, bzw. mit den Stützstellen $x_0 = -2\pi$, $x_1 = -\pi$, $x_2 = 0$, $x_3 = \pi$, $x_4 = 2\pi$. Erklären Sie was Sie sehen.

  (ii) $g(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ auf einem äquidistanten Gitter auf $[-1, 1]$. Was beobachten Sie für steigende Anzahl an Stützstellen (einstellige bis niedrige zweistelle Anzahlen)?

Um Ihnen diese zu erleichtern finden Sie ebenfalls in der *stub*-Datei eine bereits implementierte Funktion `interpolPol(xs, fs)`, deren Rückgabe, sofern Sie `divDiff(xs, fs)` korrekt implementiert haben, erlaubt das Interpolationspolynom zu den Daten `xs` und `fs` auszuwerten.

Abgabe: elektronisch bis Mo., 03.05., 12.00 Uhr
Besprechung: 03.05. - 05.05., in den Übungen